Mathématiques expertes
Matrices 1

Serge Bays

Lycée les Eucalyptus

9 décembre 2021

Définition

On appelle *matrice* tout tableau de nombres réels ou complexes disposés sous la forme d'un rectangle :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

n est le nombre de lignes et p est le nombre de colonnes. La matrice est dite de dimension (n, p), ou de taille (n, p), ou de type (n, p).

Exemple

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(2,3)$ comportant deux lignes et trois colonnes.

On note généralement $a_{i,j}$ le terme ou coefficient d'une matrice où i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne. On notera alors $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice ayant n lignes et p colonnes.

Dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, on a $a_{2,3} = 0$.

- Si une matrice comporte le même nombre de lignes et de colonnes, soit $n = p$, on dit qu'il s'agit d'une *matrice carrée* d'ordre n.

Par exemple une matrice carrée d'ordre 3 (de dimension $(3,3)$) : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- La *diagonale* d'une matrice carrée d'ordre n est composée des n coefficients $a_{i,i}$ pour i allant de 1 à n.

- Une *matrice diagonale* est une matrice carrée dont tous les éléments qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls.

- Une matrice carrée diagonale d'ordre n dont tous les éléments situés sur la diagonale sont égaux à 1, ($a_{i,i} = 1$ pour i allant de 1 à n et $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$), est appelée *matrice identité* ou *matrice unité*. On la note I_n.

- Si la matrice ne comporte qu'une ligne, il s'agit d'une *matrice ligne*. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Si la matrice ne comporte qu'une seule colonne, on dit que c'est une *matrice colonne* : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls.

Deux matrices sont égales si et seulement si ces matrices sont de même dimension, c'est-à-dire qu'elles ont le même nombre de lignes et de colonnes, et si leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices (n, p), c'est-à-dire deux matrices à n lignes et p colonnes.
Alors $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$.

$A + B$ est encore une matrice de type (n, p).

Les matrices s'additionnent "termes à termes".

On note $-A$ la matrice opposée de A soit $-A = (-a_{i,j})$ et on définit $A - B$ par $A + (-B)$.

- On ne peut additionner des matrices que si elles sont de même taille (même nombre de lignes et de colonnes).
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$ où O est la matrice nulle, la matrice de même type que A ne comportant que des zéros.
- $A + (-A) = A - A = O$

Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice (n, p), et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On pose : $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$. La matrice λA est donc obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice A par λ et elle est du même type que A.

Remarque : L'écriture $A\lambda$ n'existe pas.

- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
- $0A=O$

Définition

Pour pouvoir calculer le produit de deux matrices A et B, le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde.

Pour obtenir le terme de la i-ème ligne et de la j-ième colonne d'une matrice produit, il faut multiplier chaque terme $a_{i,k}$ de la i-ème ligne de la première matrice par le terme correspondant $b_{k,j}$ de la j-ième colonne de la seconde matrice, et additionner alors les produits obtenus.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice (n, m) et $B = (b_{i,j})$ une matrice (m, p) ; alors le produit $C = A \times B = AB$ est une matrice (n, p) définie par $C = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq m} a_{i,k} b_{k,j}$$

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda(A \times B)$
- si A est une matrice carrée d'ordre n et si $I = I_n$ est la matrice identité, alors $A \times I = I \times A = A$

Attention : même si les deux produits $A \times B$ et $B \times A$ existent, en général $A \times B \neq B \times A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 2 + (-1) \times (-1) & 1 \times (-2) + 2 \times 3 + (-1) \times 5 \\ 1 \times 4 + 3 \times 2 + 0 \times (-1) & 1 \times (-2) + 3 \times 3 + 0 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4\times 1 - 2\times 1 & 4\times 2 - 2\times 3 & 4\times(-1) - 2\times 0 \\ 2\times 1 + 3\times 1 & 2\times 2 + 3\times 3 & 2\times(-1) + 3\times 0 \\ -1\times 1 + 5\times 1 & -1\times 2 + 5\times 3 & -1\times(-1) + 5\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 5 & 13 & -2 \\ 4 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice carrée. A est dite *inversible* s'il existe une matrice carrée M d'ordre n telle que $A \times M = M \times A = I_n$.
On note $M = A^{-1}$.

Remarque : si M existe, alors M est unique et inversible avec $M^{-1} = A$.

Donc, si A est inversible alors $(A^{-1})^{-1} = A$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Notation : si A est une matrice carrée, le produit $A \times A$ est noté A^2.

Si A est une matrice carrée, alors on définit $A^0 = I$, $A^1 = A$ et $A^n = A \times A^{n-1} = A \times A \times \ldots \times A$ avec n facteurs.

Si D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux d_i, alors D^n est la matrice diagonale de coefficients diagonaux d_i^n.