Test 5 : Nombres complexes (Maths expertes)

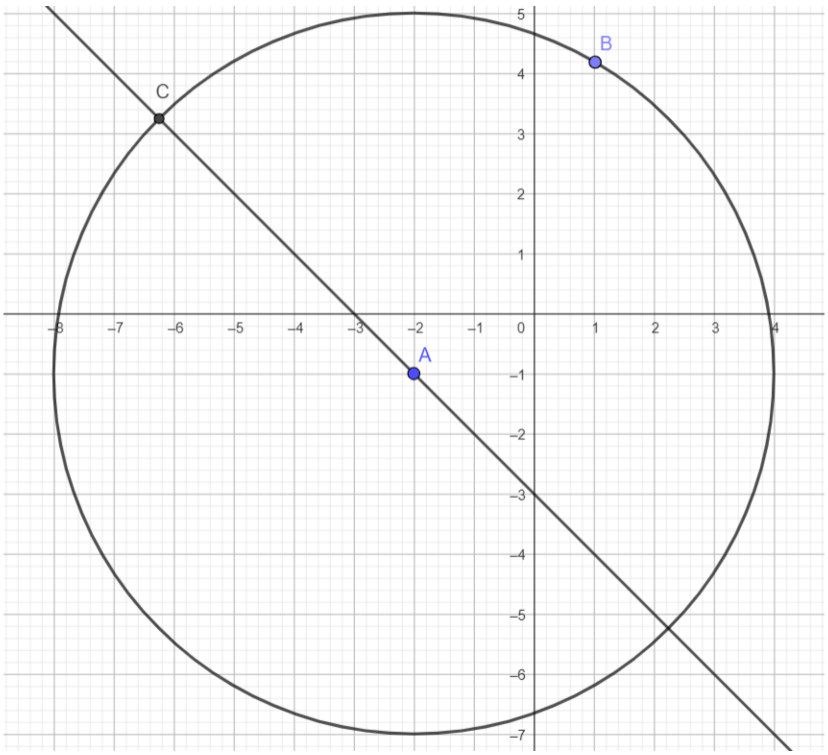
Durée : 50 minutes

Correction

Justifier toutes vos réponses. La présentation sera prise en compte. La calculatrice est interdite !
Les élèves disposant d'un tiers temps ne traiteront pas les questions marquées de ★.
La présentation sera prise en compte (1 pt).

Exercice 1 : Coordonnées dans le plan complexe (2.5 pts)

Déterminer l'affixe **exact**, sous forme algébrique, des points A , (B★) et C situés dans le plan complexe ci-dessous (0.5 pt+ 1 pt + 1 pt) :



$z_A = -2 - i$ (évident)

B est sur le cercle de centre A et de rayon 6.
En voyant A comme l'origine du repère et le cercle comme le cercle trigonométrique de rayon 1, on voit simplement que B est situé à $\frac{\pi}{3}$. (grâce à l'abscisse)
Ainsi, $z_B = z_A + +6(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i(3\sqrt{3} - 1)$

C est sur le cercle trigonométrique et en raisonnant de manière analogue, C est sur le droite d'équation $y = -x$, "en haut à gauche", donc situé à $\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi, $z_C = z_A + 6(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-2 - 3\sqrt{2}) + i(3\sqrt{2} - 1)$

Exercice 2 : Formules d'addition et de duplication (4.5 pts)

1)a) Décomposer $\frac{5\pi}{12}$ comme une somme ou une différence de mesures connues. (0.5 pt)

$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ (somme de mesures connues mais ce n'est pas l'unique réponse possible).

b) Déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ (0.75 pts)

$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

★ c)Déterminer la valeur exacte de $\sin(\frac{5\pi}{12})$. (0.75 pts)

$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2)Soit $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que que $\cos(a) = \frac{1}{3}$.

a)Déterminer la valeur exacte de $\sin(a)$. (0.5 pts)

$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = \frac{8}{9}$ donc $\sin(a) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ car comme $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin(a) \geq 0$.

b)Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{a}{2})$, $\sin(\frac{a}{2})$, $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$. (2 pts)

$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = -\frac{7}{9}$.

$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

De même, on a $\cos(a) = 2\cos^2(\frac{a}{2}) - 1$ donc $\cos^2(\frac{a}{2}) = \frac{\cos(a)+1}{2} = \frac{2}{3}$ donc $\cos(a) = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}$ car $\frac{a}{2} \in]0; \frac{\pi}{4}[$ donc $\cos(\frac{a}{2}) \geq 0$.

$\sin(a) = 2\cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{a}{2})$ donc $\sin(\frac{a}{2}) = \frac{\sin(a)}{2\cos(\frac{a}{2})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3 : Détermination du module et de l'argument (4.5 pts)

1) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z_1 = (-2+i2\sqrt{3})^{13}$. (1.5 pts)

$\rho = |-2+i2\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$Z_1 = 4(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ donc on cherche θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2})$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$Z_1 = (4e^{i\frac{2\pi}{3}})^{13} = 4^{13}e^{i\frac{26\pi}{3}} = 4^{13}13e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\rho = 4^{13}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

★ 2) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z_2 = e^{\frac{i\pi}{7}} + e^{-\frac{i\pi}{8}}$. (1.5 pts)

$e^{ia}+e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}) = e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos(\frac{a-b}{2})$

Ici, avec $a = \frac{1}{7}$ et $b = -\frac{1}{8}$,on a $a-b = \frac{15}{56}$ et $a+b = \frac{1}{56}$.

Ainsi, $Z_2 = e^{i\frac{\pi}{112}}2\cos(\frac{15\pi}{112})$ avec $2\cos(\frac{15\pi}{112}) > 0$ car $\frac{15\pi}{112} \in]0;\frac{\pi}{2}[$.

Donc $\rho = 2\cos(\frac{15\pi}{112})$ et $\theta = \frac{\pi}{112}[2\pi]$

3) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z_3 = e^{\frac{5i\pi}{11}} - e^{\frac{7i\pi}{13}}$. (1.5 pts)

$e^{ia}-e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}) = e^{i\frac{a+b}{2}}2i\sin(\frac{a-b}{2}) = e^{i(\frac{a+b}{2}+\frac{\pi}{2})}2\sin(\frac{a-b}{2})$

Ici, avec $a = \frac{5}{11}$ et $b = \frac{7}{13}$, on a $a-b = \frac{65-77}{143} = \frac{-12}{143}$ et $a+b = \frac{65+77}{143} = \frac{142}{143}$.

Ainsi, $Z_3 = e^{i(\frac{\frac{142\pi}{143}}{2}+\frac{\pi}{2})}2\sin(\frac{\frac{-12\pi}{143}}{2}) = e^{i(\frac{71\pi}{143}+\frac{\pi}{2})}2\sin(\frac{-6\pi}{143}) = e^{i\frac{142\pi+143\pi}{286}}2\sin(\frac{-6\pi}{143}) = e^{i\frac{285\pi}{286}}2\sin(\frac{-6\pi}{143})$

Ce n'est pas fini car $2\sin(\frac{-6\pi}{143}) < 0$ car $\frac{-6\pi}{143} \in]-\frac{\pi}{2};0[$ et le module est toujours positif.

On peut écrire $2\sin(\frac{-6\pi}{143}) = -2\sin(\frac{6\pi}{143}) = e^{-i\pi}2\sin(\frac{6\pi}{143})$ (sin est impaire)

Ainsi, $Z_3 = e^{i(\frac{285\pi}{286}-\pi)}2\sin(\frac{6\pi}{143}) = e^{-i\frac{\pi}{286}}2\sin(\frac{6\pi}{143})$ Donc $\rho = 2\sin(\frac{6\pi}{143})$ et $\theta = \frac{-\pi}{286}[2\pi]$