Test 3 : Arithmétique - Partie 1 (Maths expertes)

Durée : 1h

Correction

La calculatrice est interdite. La présentation sera prise en compte (1.5 pts).
Les élèves disposant d'un tiers temps auront 20 minutes supplémentaires.

1)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $10^{(5^n)}$ par 7. (3 pts)

$10^{(5^n)} \equiv 3^{(5^n)}[7]$

En calculant 3^n modulo 7 pour quelques n, on trouve $3^6 \equiv 1[7]$
Il reste donc à déterminer le reste de la division euclidienne de 5^n par 6.
$5 \equiv -1[6]$ donc $5^n \equiv (-1)^n[6] \equiv \left\{ \begin{array}{l} 1[6] \text{ si n est pair.} \\ -1[6] \equiv 5[6] \text{ sinon} \end{array} \right.$.

Ainsi, $3^{(5^n)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3^1[7] \equiv 3[7] \text{ si n est pair.} \\ 3^5[7] \equiv 5[7] \text{ sinon} \end{array} \right.$

Le reste est donc 3 si n est pair et 5 si n est impair.

2)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $11|3^{2n}+2^{6n-5}$. (3 pts)

Ici il y a au moins deux méthodes :

Méthode 1 : Tableau de congruences.
On cherche un cycle de répétition pour 3^{2n} modulo 11 et de même pour 2^{6n-5}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$3^{2n}[11]$	-2	4	3	5	1	-2	etc...	
$2^{6n-5}[11]$	2	-4	-3	6	-1	2	-4	etc....

On observe qu'il y a 5 restes possibles pour 3^{2n} et 2^{6n-5} donc on va raisonner par disjonction de cas avec 5 cas (donc modulo 5).
(Notons que $3^{2\times 5k}=3^{10k}=(3^{10})^k\equiv 1[11]$ et de même $2^{6\times 5k-5}=2^{5(6k-1)}=32^{6k-1}\equiv(-1)^{6k-1}[11]\equiv -1[11]$

Nous pouvons donc résumer la situation en faisant un tableau de la forme :

$n[5]$	1	2	3	4	5
$3^{2n}[11]$	-2	4	3	5	1
$2^{6n-5}[11]$	2	-4	-3	6	-1
$3^{2n}+2^{6n-5}[11]$	0	0	0	0	0

Ce qui prouve bien le résultat.

Méthode 2 : Par récurrence.$P(n)$: $11|3^{2n}+2^{6n-5}$

a)Initialisation : $n=1$.
$3^2+2^1=11$ qui est bien divisible par 11 donc $P(1)$ est vraie.

b)Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $P(k+1)$ est encore vraie.

On sait par hypothèse de récurrence que $11|3^{2k}+2^{6k-5}$.
$3^{2(k+1)}+2^{6(k+1)-5}=9\times 3^{2k}+64\times 2^{6k-5}=9(3^{2k}+2^{6k-5})+55\times 2^{6k-5}$
Le premier terme est divisible par 11 par hypothèse de récurrence et le second aussi car 55 l'est.
Donc $P(k+1)$ est vraie.

L'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n\geq 1$.

3)Déterminer les couples d'entiers **relatifs** $(m;n)$ vérifiant l'équation $m^2 - m - nm + 2n - 8 = 0$. (3 pts)
Indication : Il faut commencer par factoriser sous la forme $(am + bn + c)(a'm + b'n + c') = k$ où $a, a', b, b', c, c', k \in \mathbb{Z}$

$(am + bn + c)(a'm + b'n + c') = aa'm^2 + (ac' + a'c)m + (ab' + a'b)mn + bb'n^2 + (bc' + b'c)n + cc'$
Par identification, on a :

$aa' = 1$, $ac' + a'c = -1$, $ab' + a'b = -1$, $bb' = 0$ et $bc' + b'c = 2$.

$bb' = 0$ donne $b = 0$ ou $b'0$ et $aa' = 1$ donc $a = a' = (+/-)1$.
Si $b' = 0$ et $a = a' = 1$, on a :
$c + c' = -1$, $b = -1$, $-c' = 2$ qui donne finalement que $c = 1$
Vérifions :

$(m - n + 1)(m - 2) = m^2 - m - nm + 2n - 2$
Ainsi, on en déduit que $m^2 - m - nm + 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - nm + 2n - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (m - n + 1)(m - 2) = 6$

Donc $(m - n + 1)$ et $m - 2$ sont des diviseurs de 6.
Or, les seuls diviseurs de 6 sont : $1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6$.

Nous avons donc 8 systèmes d'équations à résoudre :

a)$\begin{cases} m - n + 1 = 1 \\ m - 2 = 6 \end{cases}$ qui donne $m = 8$ et $n = 8$
b)$\begin{cases} m - n + 1 = -1 \\ m - 2 = -6 \end{cases}$ qui donne $m = -4$ et $n = -2$
c)$\begin{cases} m - n + 1 = 6 \\ m - 2 = 1 \end{cases}$ qui donne $m = 3$ et $n = -2$
d)$\begin{cases} m - n + 1 = -6 \\ m - 2 = -1 \end{cases}$ qui donne $m = 1$ et $n = 8$
e)$\begin{cases} m - n + 1 = 2 \\ m - 2 = 3 \end{cases}$ qui donne $m = 5$ et $n = 4$
f)$\begin{cases} m - n + 1 = -2 \\ m - 2 = -3 \end{cases}$ qui donne $m = -1$ et $n = 2$
g)$\begin{cases} m - n + 1 = 3 \\ m - 2 = 2 \end{cases}$ qui donne $m = 4$ et $n = 2$
h)$\begin{cases} m - n + 1 = -3 \\ m - 2 = -2 \end{cases}$ qui donne $m = 0$ et $n = 4$

Finalement, $S = \{(8; 8), (-4; -2), (3; -2), (1; 8), (5; 4), (-1; 2), (4; 2); (0; 4)\}$

4)Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n+1|8n^2-6n+5$. (3 pts)

$2n+1|8n^2-6n+5$ et $2n+1|2n+1$ donc $2n+1|(8n^2-6n+5)-4n(2n+1)$ donc $2n+1|5-10n$ et donc $2n+1|5(2n+1)+(5-10n)$ qui donne $2n+1|10$.

Les seuls diviseurs de 10 sont $1; -1; 2; -2; 5; -5; 10; -10$

Donc on regarde dans quels cas avons nous que $2n+1$ est l'un de ces diviseurs. Pour gagner du temps, nous pouvons remarquer que $2n+1$ est toujours impair, ce qui enlève les diviseurs pairs.
$2n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$
$2n+1 = -1 \Rightarrow n = -1$
$2n+1 = 5 \Rightarrow n = 2$
$2n+1 = -5 \Rightarrow n = -3$
Finalement, $S = \{-3; -1; 0; 2\}$

5)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$. (3 pts)

Pour commencer, on sait depuis la première que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc on souhaite démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Raisonnons par récurrence.

On note $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

a)Initialisation : $n = 1$

$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

b)Hérédité : Supposons $P(N)$ vraie pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $P(N+1)$ est encore vraie.

$\sum_{k=1}^{N+1} k^3 = \sum_{k=1}^{N} k^3 + (N+1)^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} + (N+1)^3$ par Hypothèse de récurrence.

$= (N+1)^2(\frac{N^2}{4} + \frac{4(N+1)}{4}) = (N+1)^2(\frac{N^2+4N+4}{4}) = \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{4}$

Donc $P(N+1)$ est encore vraie.

L'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Remarque : Si on a oublié que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on pouvait quand même faire la question.

L'initialisation se montre facilement et en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ et $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$, on aurait :

$S_{N+1} = S_N + (N+1)^3 = (A_N)^2 + (N+1)^3$ et $(A_{N+1})^2 = (A_N + (N+1))^2 = (A_N)^2 + 2A_N(N+1) + (N+1)^2$

Pour avoir l'hérédité, il suffit donc de montrer que $(N+1)^3 = 2A_N(N+1)+(N+1)^2$, autrement dit $(N+1)^2 = 2A_N+N+1$ autrement dit, $2A_N = (N+1)^2 - (N+1) = (N+1)N$ et donc que $A_N = \frac{N(N+1)}{2}$.

Ce dernier résultat se retrouve en notant que $A_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + N$ mais aussi $A_N = N + (N-1) + \cdots + 2 + 1$ et donc en sommant les deux égalités on obtient $2A_N = (1+N) + (2+(N-1)) + \cdots + ((N-1)+2) + (N+1) = N(N+1)$ d'où le résultat.