Test 3 : Arithmétique - Partie 1 (Maths expertes)

Rattrapages

Correction

La calculatrice est interdite. Rédiger directement sur le sujet.
Durée : 40 minutes + 15 minutes tiers temps. +2 pts par question.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2022^{2023} par 19.

Un tableau qui pourrait vous être utile durant l'exercice.

n	1	2	3	4	5	6	7												
$8^n[19]$	8	7	-1	-8	-7	1	8	etc											

Pour commencer, $2022 = 19 \times 106 + 8$ d'où $2022^{2023} \equiv 8^{2023}[19]$.
Ensuite, on peut chercher un cycle dans 8^n modulo 19 avec le tableau par exemple.

On constate que $8^6 \equiv 1[19]$.
Ainsi, il ne reste plus qu'à trouver le reste de la division euclidienne de 2023 par 6.
Or, $2023 = 6 \times 337 + 1$ et on a alors $8^{2023} = (8^6)^{337} \times 8 \equiv 1^{337} \times 8 \equiv 8[19]$.
Le reste de la division euclidienne de 2022^{2023} par 19 est donc 8.

2)En complétant les tableaux ci-dessous, déterminer les entiers naturels n tels que $13|2^{3n+4} - 3^n + 5^n - 7^{2n-2}$.

On cherche un cycle pour chacun des termes de cette somme.

n	1	2	3	4	5	6										
$2^{3n+4}[13]$	-2	-3	2	3	-2	-3	2	3	etc							
$3^n[13]$	3	9	1	3	9	1	etc									
$5^n[13]$	5	-1	-5	1	5	-1	-5	1	etc							
$7^{2n-2}[13]$	1	-3	9	-1	3	-9	1	-3	9	-1	3	-9	etc			

Les restes possibles pour 2^{3n+4} dans la division euclidienne par 13 sont : $-2; -3; 2; 3$ (cycle de longueur 4)

Les restes possibles pour 3^n dans la division euclidienne par13 sont : $3; 9; 1$ (cycle de longueur 3)

Les restes possibles pour 5^n dans la division euclidienne par13 sont : $5; -1; -5; 1$ (cycle de longueur 4)

Les restes possibles pour 7^{2n-2} dans la division euclidienne par 13 sont : $1; -3; 9; -1; 3; -9$ (cycle de longueur 6)

Le plus petit cycle commun aux quatre termes est donc 12.
Donc on raisonne modulo 12 pour n :

On note $A_n = 2^{3n+4} - 3^n + 5^n - 7^{2n-2}$

$n[12]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
$2^{3n+4}[13]$	-2	-3	2	3	-2	-3	2	3	-2	-3	2	3				
$-3^n[13]$	-3	-9	-1	-3	-9	-1	-3	-9	-1	-3	-9	-1				
$5^n[13]$	5	-1	-5	1	5	-1	-5	1	5	-1	-5	1				
$-7^{2n-2}[13]$	-1	3	-9	1	-3	9	-1	3	-9	1	-3	9				
$A_n[13]$	-1	3	0	2	4	4	6	-2	6	7	-2	-1				

Finalement, $13|A_n \Leftrightarrow n \equiv 3[12]$

3)Déterminer les couples d'entiers **relatifs** $(m;n)$ vérifiant l'équation $mn = 2m + 3n + 6$.

$mn = 2m + 3n + 6 \Leftrightarrow mn - 2m - 3n - 6 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(n-2) - 12 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(n-2) = 12.$

On doit donc résoudre le système diophantien : $\begin{cases} m-3 = a \\ n-2 = b \\ ab = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a+3 \\ n = b+2 \\ ab = 12 \end{cases}$
où a et b sont des diviseurs de 12. (1,2,3,4,6,12 + les négatifs)

Ainsi, on peut résumer la situation avec un tableau :

a	1	-1	12	-12	2	-2	6	-6	3	-3	4	-4
b	12	-12	1	-1	6	-6	2	-2	4	-4	3	-3
$m = a+3$	4	2	15	-9	5	1	9	-3	6	0	7	-1
$n = b+2$	14	-10	3	1	8	-4	4	0	6	-2	5	-1

Ainsi, il y a 12 couples solutions :
$S = \{(4;14); (2;-10); (15;3); (-9;1); (5;8); (1;-4); (9;4); (-3;0); (6;6); (0;-2); (7;5); (-1;-1)\}$

4)Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence la propriété P_n : "9 divise $4^n + 15n - 1$".

Indication : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, on a $ab + c = a(b+c) + c(1-a)$

Initialisation : $n = 0$

$4^0 + 15 \times 0 - 1 = 0$ qui est bien divisible par 9 donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons que P_k soit vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$. $(9|4^k + 15k - 1)$
Montrons que P_{k+1} est encore vraie.

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \times 4^k + 15k - 1 + 15$

A l'aide de l'indication (ici $a = 4$, $b = 4^k$ et $c = 15k - 1$), on a :

$4 \times 4^k + 15k - 1 + 15 = 4(4^k + 15k - 1) + (15k - 1)(1 - 4) + 15 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18$

Il est clair que 9 divise $-45k + 18$ et par hypothèse de récurrence $9|4^k + 15k - 1$ donc $9|4(4^k + 15k - 1)$.
Donc 9 divise la somme des deux.

Ainsi P_{k+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et l'hérédité est vérifié donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.