Corrections

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Test 2 : Polynômes et matrices (Maths expertes)

Sujet A

Durée : 1h

La calculatrice est interdite. Justifier toutes vos réponses !
Les élèves disposant d'un tiers temps ne traiteront auront 20 minutes supplémentaires.
Le devoir est sur 13 pts. La présentation sera prise en compte. (1 pt bonus)

Partie 1 : Polynômes (6 pts)

On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - iz^3 + z^2 + (10-i)z - 10i$
On note r_1, r_2, r_3 et r_4 les racines de P.

1)Montrer que -2 est une racine de P. On pose $r_1 = -2$. (1 pt)

$P(-2) = (-2)^4 - i(-2)^3 + (-2)^2 + (10-i)(-2) - 10i = 16 + 8i + 4 - 20 + 2i - 10i = 0$

Donc -2 est bien une racine de P.

2)Montrer que $r_2 \in \{-1; 1; -i; i\}$. (1 pt)

$P(i) = i^4 - ii^3 + i^2 + (10-i)i - 10i = 1 - 1 - 1 + 10i + 1 - 10i = 0$

Donc $r_2 = i$ est bien une autre racine de P.

3)a)En raisonnant sur la somme et le produit des racines de P, déterminer un système d'équations de deux équations à deux inconnues dont le couple (z_3, z_4) est solution. (1.5 pts)

Nous savons d'après le cours que : $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = i \\ r_1 \times r_2 \times r_3 \times r_4 = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = -10i \end{cases}$

qui donne en remplaçant r_1 par -2 et r_2 par i : $\begin{cases} r_3 + r_4 = 2 \\ r_3 \times r_4 = 5 \end{cases}$

b)Résoudre ce système. (1.5 pts)

D'après L_1, on a $r_4 = 2 - r_3$ et en substituant dans L_2 on a donc $r_3(2 - r_3) = 5$ soit $r_3^2 - 2r_3 + 5 = 0$.(Notons qu'on aurait eu la même relation avec r_4 en substituant r_3)

Ainsi , r_3 et r_4 sont les racines de $Q(z) = z^2 - 2z + 5$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 = (4i)^2$

Il y a deux solutions complexes à l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ qui sont : $z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$.

L'une d'elle est r_3 , l'autre r_4 (que l'on vérifie rapidement avec $r_4 = 2 - r_3$ si nous ne sommes toujours pas convaincu).

4)En déduire l'écriture factorisée de P. (1 pt)

Finalement, la forme factorisée de P est $P(z) = (z+2)(z-i)(z-1-2i)(z-1+2i)$

Partie 2 : Matrices (7 pts)

2)Dans chacun des cas suivants, calculer, si il existe , le produit AB :

a)$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. (1 pt)

Le produit est possible car A a autant de colonnes que B a de lignes. De plus, AB aura autant de lignes que A et autant de colonnes que B.
$AB = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$

b)$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -7 \\ 1 & -43 & 23 \\ -1 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

c)$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} -29 & 62 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}$

d)$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} -10 & 16 & -17 \\ -7 & 11 & 18 \\ 17 & -33 & 23 \end{pmatrix}$

2)Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice A :

a)$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (0.5 pt + 0.5 pt bonus)

det $A = 3 \times 2 - 5 \times (-2) = 16 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b)$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (0.5 pt)

det $A = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$ donc A n'est pas inversible.

c)$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ (2 pts)

Pour commencer on calcule le déterminant de A a l'aide de la formule de Sarrus :
det $A = -45 + 96 + 84 - (105 - 48 + 72) = 135 - 129 = 6 \neq 0$ donc A est inversible.
On détermine alors son inverse grâce a la méthode des miroirs :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 13 & 22 \\ 0 & 18 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_2 + 3L_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 13 & 22 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \ (L_3 \leftarrow \tfrac{1}{6}L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{6} \\ 0.5 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \ (L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{6} \\ 0.5 & -3 & \frac{13}{6} \end{pmatrix} \ (L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ 1 & -5 & \frac{11}{3} \\ -0.5 & 3 & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \ (L_1 \leftarrow -1 \times L_1 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \text{ et } L_3 \leftarrow -1 \times L_3)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ 1 & -5 & \frac{11}{3} \\ -0.5 & 3 & -\frac{13}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -30 & 22 \\ -3 & 18 & -13 \end{pmatrix}$

Remarques : a) On peut vérifier en calculant $A \times A^{-1}$ et on trouve bien I_3.

b)Il y a également une formule générale pour l'inverse d'une matrice , non vue en cours.

La formule générale est $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{Com(A)}$, qui se lit "l'inverse du déterminant multiplié par la transposée de la comatrice de A".

Com(A) est la matrice de même taille que A où le coefficient à la ligne i et à la colonne j vaut $(-1)^{i+j} \times \det(B_{i,j})$ où $B_{i,j}$ est la sous matrice de A obtenue en retirant sa i-ième ligne et sa j-ième colonne

Ici, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{6} {}^t \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} {}^t \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -30 & 18 \\ -3 & 22 & -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -30 & 22 \\ -3 & 18 & -13 \end{pmatrix}$$

Notons que cette formule est "sympathique" pour l'inverse de matrice 3×3 mais qu'elle devient très laborieuse pour les matrices plus grandes.

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Test 2 : Polynômes et matrices (Maths expertes)

Sujet B

Durée : 1h

La calculatrice est interdite. Justifier toutes vos réponses !
Les élèves disposant d'un tiers temps ne traiteront auront 20 minutes supplémentaires.
Le devoir est sur 13 pts. La présentation sera prise en compte. (1 pt bonus)

Partie 1 : Polynômes (6 pts)

On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 + (i-6)z^3 + (13-6i)z^2 + (13i-10)z - 10i$
On note r_1, r_2, r_3 et r_4 les racines de P.

1)Montrer que 2 est une racine de P. On pose $r_1 = 2$. (1 pt)

$P(2) = 2^4 + (i-6)2^3 + (13-6i)2^2 + (13i-10)2 - 10i = 16 + 8i - 48 + 52 - 24i + 26i - 20 - 10i = 0$

Donc 2 est bien une racine de P.

2)Montrer que $r_2 \in \{-1; 1; -i; i\}$. (1 pt)

$P(-i) = (-i)^4 + (i-6)(-i)^3 + (13-6i)(-i)^2 + (13i-10)(-i) - 10i = 1 - 1 - 6i - 13 + 6i + 13 + 10i - 10i = 0$

Donc $r_2 = -i$ est bien une autre racine de P.

3)a)En raisonnant sur la somme et le produit des racines de P, déterminer un système d'équations de deux équations à deux inconnues dont le couple (r_3, r_4) est solution. (1.5 pts)

Nous savons d'après le cours que : $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(i-6) = 6-i \\ r_1 \times r_2 \times r_3 \times r_4 = (-1)^4 \frac{a_0}{a_4} = -10i \end{cases}$

qui donne en remplaçant r_1 par 2 et r_2 par $-i$: $\begin{cases} r_3 + r_4 = 4 \\ r_3 \times r_4 = 5 \end{cases}$

b)Résoudre ce système. (1.5 pts)

D'après L_1, $r_4 = 4 - r_3$ et en substituant dans L_2 on a donc $r_3(4 - r_3) = 5$ soit $r_3^2 - 4r_3 + 5 = 0$. (Notons qu'on aurait eu la même relation avec r_4 en substituant r_3)

Ainsi , r_3 et r_4 sont les racines de $Q(z) = z^2 - 4z + 5$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2$

Q a donc deux racines complexes qui sont $z_1 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$

L'une d'elle est r_3, l'autre r_4 (que l'on vérifie rapidement avec $r_4 = 4 - r_3$ si nous ne sommes toujours pas convaincu).

4)En déduire l'écriture factorisée de P. (1 pt)

Finalement, la forme factorisée de P est $P(z) = (z-2)(z+i)(z-2+i)(z-2-i)$

Partie 2 : Matrices (7 pts)

2)Dans chacun des cas suivants, calculer, si il existe , le produit AB :

a)$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Le produit est possible car A a autant de colonnes que B a de lignes. De plus, AB aura autant de lignes que A et autant de colonnes que B.
$AB = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}$

b)$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} -16 & -15 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$

c)$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 12 \\ -4 & 49 & 3 \\ 5 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

d)$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pt)

Idem pour la justification. $AB = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -12 \\ -32 & 18 & 22 \\ 3 & -14 & 0 \end{pmatrix}$

2)Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice A :

a)$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (0.5 pt)

$\det A = 4 \times 2 - 8 \times 1 = 0$ donc A n'est pas inversible.

b)$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (0.5 pt)

$\det A = -2 \times 5 - 3 \times 2 = -16 \neq 0$ donc A est inversible de $A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c)$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}$ (2 pts)

Pour commencer on calcule le déterminant de A a l'aide de la formule de Sarrus :
det $A = 105+72-48-(-45+96+84) = 129-135 = -6 \neq 0$ donc A est inversible.
On détermine alors son inverse grâce a la méthode des miroirs :

$$\begin{pmatrix}3&2&-1\\6&5&4\\9&8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}3&2&-1\\0&1&6\\0&2&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix} (L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3-3L_1)$$

$$\sim \begin{pmatrix}3&2&-1\\0&1&6\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix} (\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix}3&2&-1\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-0.5&1&-0.5\end{pmatrix} (\ L_3 \leftarrow \tfrac{L_3}{-2})$$

$$\sim \begin{pmatrix}3&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5&1&-0.5\\1&-5&3\\-0.5&1&-0.5\end{pmatrix} (L_1 \leftarrow L_1+L_3 \text{ et } L_2 \leftarrow L_2-6L_3)$$

$$\sim \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1.5&11&-6.5\\1&-5&3\\-0.5&1&-0.5\end{pmatrix} (L_1 \leftarrow L_1-2L_2)$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.5&\frac{11}{3}&\frac{-13}{6}\\1&-5&3\\-0.5&1&-0.5\end{pmatrix} (L_1 \leftarrow \tfrac{L_1}{3})$$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}-0.5&\frac{11}{3}&\frac{-13}{6}\\1&-5&3\\-0.5&1&-0.5\end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix}3&-22&13\\-6&30&-18\\3&-6&3\end{pmatrix}$

Remarques : a) On peut vérifier en calculant $A\times A^{-1}$ et on trouve bien I_3.

b)Il y a également une formule générale pour l'inverse d'une matrice , non vue en cours.

La formule générale est $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\mathrm{Com(A)}$, qui se lit "l'inverse du déterminant multiplié par la transposée de la comatrice de A".

Com(A) est la matrice de même taille que A où le coefficient à la ligne i et à la colonne j vaut $(-1)^{i+j}\times\det(B_{i,j})$ où $B_{i,j}$ est la sous matrice de A obtenue en retirant sa i-ième ligne et sa j-ième colonne

Ici, on a :

$$A^{-1}=\frac{1}{-6}{}^t\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}5&4\\8&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6&4\\9&7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6&5\\9&8\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&-1\\8&7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&-1\\9&7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&2\\9&8\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&-1\\5&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&-1\\6&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{-6}{}^t\begin{pmatrix}3&-6&3\\-22&30&-6\\13&-18&3\end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix}3&-22&13\\-6&30&-18\\3&-6&3\end{pmatrix}$$

Notons que cette formule est "sympathique" pour l'inverse de matrice 3×3 mais qu'elle devient très laborieuse pour les matrices plus grandes.