

# Défis Mathématiques : Arithmétique

Voici 7 premiers défis sur l'arithmétique. Un défi peut être traité en binôme.

Ces défis sont facultatifs. Un binôme ayant traité un défi devra être capable de le présenter au tableau sans appui.

## Défi 1 : ★

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que  $13 \mid 2^{2^{8n+6}} + 10$ .

## Défi 2 : ★

Déterminer les couples  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $n^3 + m^3 = 3$ .

## Défi 3 : ★★

Montrer que pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on a  $24a^2 + 1 = b^2 \Rightarrow 5 \mid ab$ . Que dire de la réciproque ?

## Défi 4 : ★★

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  vérifiant le système : 
$$\begin{cases} 5n \equiv 7[11] \\ 7n \equiv 11[5] \\ 11n \equiv 5[7] \end{cases}$$

## Défi 5 : ★★

Déterminer les couples  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $n^2 = 9m^2 - 39m + 40$ .

## Défi 6 : ★★★

Soit  $n \in \mathbb{N}$  non premier avec  $n \geq 6$ . Démontrer que  $n \mid (n-2)!$

## Défi 7 : ★★★

Démontrer qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(f(n)) = n + 1$