Contrôle 1 : Nombres complexes, arithmétique et matrices (Maths expertes)

Correction

Durée : 2h

Justifier toutes vos réponses. La présentation sera prise en compte (2 pts).
Le contrôle est sur 30 points. La calculatrice est autorisée.
Les élèves disposant d'un tiers temps ne traiteront pas les questions marquées de ★

Exercice 1 : Nombres complexes (10 points)

1)Résoudre les équations suivantes :

a)$2iz^2 + 3z = 0$ (1 pt)
$2iz^2 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(2iz+3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $2iz = -3$ qui donne $z = \frac{-3}{2i} = \frac{3i}{2}$

b) $z^4 + z^2 - 2 = 0$ (2 pts)

On pose $Z = z^2$.
$z^4 + z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z^2 - 2 = 0$
$\Delta = 1 - 4(1)(-2) = 9 = 3^2$ donc on obtient 2 racines $Z_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $Z_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

Enfin, $Z = z^2$ donc on cherche les z tels que $z^2 = 1$ ou $z^2 = -2$.
$z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$
$z^2 = -2 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$ (Attention, nous sommes dans $\mathbb{C}$, il y a bien des solutions)

2)On munit le plan d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On appelle A le point de coordonnées $(2; 0)$.
A tout nombre $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $z' = \frac{2-iz}{2-z}$.
On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels.
Soit $M(x; y)$ un point du plan distinct du point A et $M'(x', y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z \mapsto z'$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'ensemble des points M quand z' vérifient certaines conditions.

a) Soit $B(2; 1)$.
Déterminer les coordonnées (x', y') du point B', image du point B par la transformation définie précédemment. (1 pt)

$z' = \frac{2-i(2+i)}{2-(2+i)} = \frac{3-2i}{-i} = \frac{(3-2i)i}{1^2} = 2 + 3i$ d'où $B'(2; 3)$

b)Soit $C'(1; 2)$.
Déterminer les coordonnées (x, y) du point C dont l'image est C'. (1.5 pts)

$\frac{2-iz}{2-z} = 1 + 2i \Leftrightarrow 2 - iz = (1+2i)(2-z) \Leftrightarrow 2 - iz = 2 + 4i - z(1+2i) \Leftrightarrow 2 - 2 - 4i = iz - z(1+2i)$

$\Leftrightarrow -4i = z(-1-i) \Leftrightarrow z = \frac{-4i}{-1-i} = \frac{4i}{1+i} = \frac{4i(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$

Donc $C(2; 2)$

c)Montrer que $z' = \frac{4-2x+2y+i(x^2-2x+y^2+2y)}{(2-x)^2+y^2}$. (1 pt)

$z' = \frac{2-iz}{2-z} = \frac{2-i(x+iy)}{2-(x+iy)} = \frac{2+y-ix}{2-x-iy} = \frac{(2+y-ix)(2-x+iy)}{(2-x)^2+y^2} = \frac{4-2x+2y+i(x^2-2x+y^2+2y)}{(2-x)^2+y^2}$

d)Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x, y)$ distincts de A, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser la nature de cet ensemble. (1.5 pts)

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$
C'est l'équation d'une droite affine.

e)Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x, y)$ distincts de A, tels que z' soit un réel et préciser la nature de cet ensemble. (2 pts)
Rappel/Indication : L'équation du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x^2 - 2x + y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$
C'est l'équation du cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.

Exercice 2 : Arithmétique (10 points)

1)On souhaite déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ a-t-on que $n^3 + 2n^2 - 9n - 6$ est divisible par $n+3$
a)Montrer que $n^3 + 2n^2 - 9n - 6$ peut s'écrire $(n+3)(n^2 + an + b) + c$ où a, b et c sont des entiers à déterminer. (1.5 pts)
$(n+3)(n^2 + an + b) + c = n^3 + (3+a)n^2 + (3a+b)n + 3b + c$

Par identification, on veut $3 + a = 2$ donc $a = -1$, puis $3a + b = -9$ donc $b = -9 - 3a = -6$ et enfin $3b + c = -6$ donc $c = -6 - 3b = 12$

b)En déduire les n solutions du problème. (1.5 pts)

$n^3 + 2n^2 - 9n - 6 = (n+3)(n^2 - n - 6) + 12$
Or, $(n+3)|(n+3)(n^2 - n - 6)$ donc il faut et il suffit d'avoir $(n+3)|12$
Les diviseurs de 12 sont $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12$

Il y a donc 12 équations à résoudre :
$n + 3 = -1$ donne $n = -4$
$n + 3 = 1$ donne $n = -2$
$n + 3 = -2$ donne $n = -5$
$n + 3 = 2$ donne $n = -1$
$n + 3 = -3$ donne $n = -6$
$n + 3 = 3$ donne $n = 0$
$n + 3 = -4$ donne $n = -7$
$n + 3 = 4$ donne $n = 1$
$n + 3 = -6$ donne $n = -9$
$n + 3 = 6$ donne $n = 3$
$n + 3 = -12$ donne $n = -15$
$n + 3 = 12$ donne $n = 9$

2)On souhaite déterminer le reste de la division euclidienne de 13^{2021} par 23
a)Montrer que $13^{11} \equiv 1[23]$ (1.5 pts)

$13^{11} = 13 * (13^2)^5 = 13 * 169^5 \equiv 13 * 8^5[23] \equiv 13 * 8 * 8^4[23] \equiv 104 * 64^2[23] \equiv 12 * 18^2[23]$

$\equiv 12 * 324[23] \equiv 12 * 2[23] \equiv 24[23] \equiv 1[23]$

b)Etablir le tableau de congruences donnant tous les restes possible de la division de 13^n par 23. (2 pts)

$n[11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$13^n[23]$	1	13	8	12	18	4	6	9	2	3	16

c)Conclure (1.5 pts)

$2021 \equiv 8[11]$ donc $13^{2021} \equiv 2[23]$
Le reste de la division euclidienne de 13^{2021} par 23 est 2.

3)A l'aide du binôme de Newton, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$. (2 pts)

$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k = \binom{n}{0} n^0 + \binom{n}{1} n^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k = 1 + n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{k-2}$ (avec $k - 2 \geq 0$)
Donc $(n+1)^n - 1 = n^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k$ et l'on constate que $n^2 | n^2$ et $n^2 | n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{k-2}$ d'où le résultat.

Exercice 3 : Matrices (10 points)

1)On considère le système d'équations : $\begin{cases} 2x+y-z &= 7 \\ -3x+2y+z &= 3 \\ x-3y+2z &= -4 \end{cases}$

a)Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous forme matriciel $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (0.5 pt)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b)Déterminer l'inverse de la matrice A . (Sans la calculatrice) (2 pts)

On pose $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$C = A^{-1} \Leftrightarrow AC = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(S_1) \begin{cases} 2a+d-g &= 1 \\ -3a+2d+g &= 0 \\ a-3d+2g &= 0 \end{cases}$ et $(S_2) \begin{cases} 2b+e-h &= 0 \\ -3b+2e+h &= 1 \\ b-3e+2h &= 0 \end{cases}$ et $(S_3) \begin{cases} 2c+f-i &= 0 \\ -3c+2f+i &= 0 \\ c-3f+2i &= 1 \end{cases}$

Avec un peu d'observation, on remarque que la somme des 3 lignes donne dans chacun des systèmes $2g = 1$, $2h = 1$ et $2i = 1$ soit $g = h = i = \frac{1}{2}$

Nous obtenons alors 3 systèmes plus simples :

$(S_1') \begin{cases} 2a+d &= 1.5 \\ -3a+2d &= -0.5 \\ a-3d &= -1 \end{cases}$ et $(S_2') \begin{cases} 2b+e &= 0.5 \\ -3b+2e &= 0.5 \\ b-3e &= -1 \end{cases}$ et $(S_3') \begin{cases} 2c+f &= 0.5 \\ -3c+2f &= -0.5 \\ c-3f &= 0 \end{cases}$

S_1 : L_1 donne $d = 1.5-2a$ donc en injectant dans L_3, on obtient $a-3(1.5-2a) = -1$ soit $7a = 3.5$ soit $a = 0.5$ puis $d = 0.5$

S_2 : L_1 donne $e = 0.5-2b$ donc en injectant dans L_3 on obtient $b-3(0.5-2b) = -1$ soit $7b = 0.5$ soit $b = \frac{1}{14}$ et $e = 0.5-2b = \frac{5}{14}$

S_3 : L_1 donne $f = 0.5-2c$ donc en injectant dans L_3 on obtient $c-3(0.5-2c) = 0$ soit $7c = 1.5$ soit $c = \frac{3}{14}$ et $f = 0.5-2c = \frac{1}{14}$

Finalement, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ 0.5 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

c)En déduire le triplet (x, y, z) solution du système. (1 pt)

$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{30}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$

2)Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1}-2^{n+1} & 2^n-3^n \\ 2\times 3^{n+1}-3\times 2^{n+1} & 3\times 2^n-2\times 3^n \end{pmatrix}$ (2.5 pts)

Soit P_n : $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1}-2^{n+1} & 2^n-3^n \\ 2\times 3^{n+1}-3\times 2^{n+1} & 3\times 2^n-2\times 3^n \end{pmatrix}$

Initialisation : $n = 1$

$\begin{pmatrix} 3^{1+1}-2^{1+1} & 2^1-3^1 \\ 2\times 3^{1+1}-3\times 2^{1+1} & 3\times 2^1-2\times 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = A = A^1$ Donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k soit vraie. Montrer que P_{k+1} est encore vraie.

$A^{k+1} = A \times A^k = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^{k+1} - 2^{k+1} & 2^k - 3^k \\ 2 \times 3^{k+1} - 3 \times 2^{k+1} & 3 \times 2^k - 2 \times 3^k \end{pmatrix}$ (**H.R.**)

$= \begin{pmatrix} 5(3^{k+1} - 2^{k+1}) - (2 \times 3^{k+1} - 3 \times 2^{k+1}) & 5(2^k - 3^k) - (3 \times 2^k - 2 \times 3^k) \\ 6(3^{k+1} - 2^{k+1}) & 6(2^k - 3^k) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \times 3^{k+1} - 2 \times 2^{k+1} & 2 \times 2^k - 3 \times 3^k \\ 2 \times 3^{k+2} - 3 \times 2^{k+2} & 3 \times 2^{k+1} - 2 \times 3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+2} - 2^{k+2} & 2^{k+1} - 3^{k+1} \\ 2 \times 3^{k+2} - 3 \times 2^{k+2} & 3 \times 2^{k+1} - 2 \times 3^{k+1} \end{pmatrix}$ ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : P_1 est vraie, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ donc P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

3)Le but de cette question est d'exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a)Calculer N^2 puis N^3 (1 pt)

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $N^3 = N \times N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ (la matrice nulle)

b)En déduire N^k pour $n \geq 3$. (0.5 pt)

On constate que $N^k = N^3 * N^{k-3} = O_3$ (avec $k - 3 \geq 0$) .

c)Justifier que D et N commutent. (0.5 pt)

$D = 2I_3$ donc $DN = 2I_3N = 2N$ et de même $ND = N2I_3 = 2N$.

d)A l'aide du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de n . (2 pts)

$A^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$.

Or, $N^k = O_3$ pour $k \geq 3$ donc on obtient :

$A^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^n - k = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^n - 1 + \binom{n}{2} N^2 D^n - 2$ (les termes suivants sont des matrices nulles)

$N^0 = I_3$ et comme $D = 2I_3$ on a $D^m = 2^m I_3$ pour tout entier naturel m.

Ainsi,

$A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n+1)}{2} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & 3n2^{n-1} - \frac{5n(n+1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & 5n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$