Contrôle 1 : Nombres complexes, arithmétique et matrices (Maths expertes)

Durée : 2h

Justifier toutes vos réponses. La présentation sera prise en compte (2 pts).
Le contrôle est sur 30 points. La calculatrice est autorisée.
Les élèves disposant d'un tiers temps ne traiteront pas les questions marquées de ★

Exercice 1 : Nombres complexes (10 points)

1)Résoudre les équations suivantes :

★ a)$2iz^2 + 3z = 0$ (1 pt)   b) $z^4 + z^2 - 2 = 0$ (2 pts)

2)On munit le plan d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On appelle A le point de coordonnées $(2; 0)$.
A tout nombre $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $z' = \frac{2-iz}{2-z}$.
On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels.
Soit $M(x; y)$ un point du plan distinct du point A et $M'(x', y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z \mapsto z'$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'ensemble des points M quand z' vérifient certaines conditions.

a) Soit $B(2; 1)$.
Déterminer les coordonnées (x', y') du point B', image du point B par la transformation définie précédemment. (1 pt)

★ b)Soit $C'(1; 2)$.
Déterminer les coordonnées (x, y) du point C dont l'image est C'. (1.5 pts)

c)Montrer que $z' = \frac{4-2x+2y+i(x^2-2x+y^2+2y)}{(2-x)^2+y^2}$. (1 pt)

d)Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x, y)$ distincts de A, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser la nature de cet ensemble. (1.5 pts)

e)Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x, y)$ distincts de A, tels que z' soit un réel et préciser la nature de cet ensemble. (2 pts)
Rappel/Indication : L'équation du cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Exercice 2 : Arithmétique (10 points)

1)On souhaite déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ a-t-on que $n^3 + 2n^2 - 9n - 6$ est divisible par $n + 3$
a)Montrer que $n^3 + 2n^2 - 9n - 6$ peut s'écrire $(n+3)(n^2 + an + b) + c$ où a, b et c sont des entiers à déterminer. (1.5 pts)
b)En déduire les n solutions du problème. (1.5 pts)

2)On souhaite déterminer le reste de la division euclidienne de 13^{2021} par 23
a)Montrer que $13^{11} \equiv 1[23]$ (1.5 pts)
b)Etablir le tableau de congruences donnant tous les restes possible de la division de 13^n par 23. (2 pts)
c)Conclure (1.5 pts)

★ 3)A l'aide du binôme de Newton, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$. (2 pts)

Exercice 3 : Matrices (10 points)

1)On considère le système d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 7 \\ -3x+2y+z & = & 3 \\ x-3y+2z & = & -4 \end{array}\right.$

a)Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous forme matriciel $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (0.5 pt)

b)Déterminer l'inverse de la matrice A . (Sans la calculatrice) (2 pts)

c)En déduire le triplet (x, y, z) solution du système. (1 pt)

★ 2)Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} & 2^n - 3^n \\ 2 \times 3^{n+1} - 3 \times 2^{n+1} & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$ (2.5 pts)

3)Le but de cette question est d'exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Soient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a)Calculer N^2 puis N^3 (1 pt)

b)En déduire N^k pour $n \geq 3$. (0.5 pt)

c)Justifier que D et N commutent. (0.5 pt)

d)A l'aide du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de n . (2 pts)