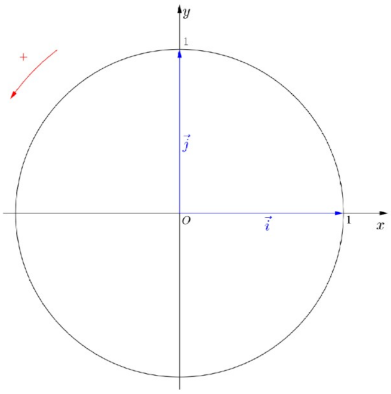
TRIGONOMÉTRIE

I) Cercle trigonométrique et radian :

1) Cercle trigonométrique :

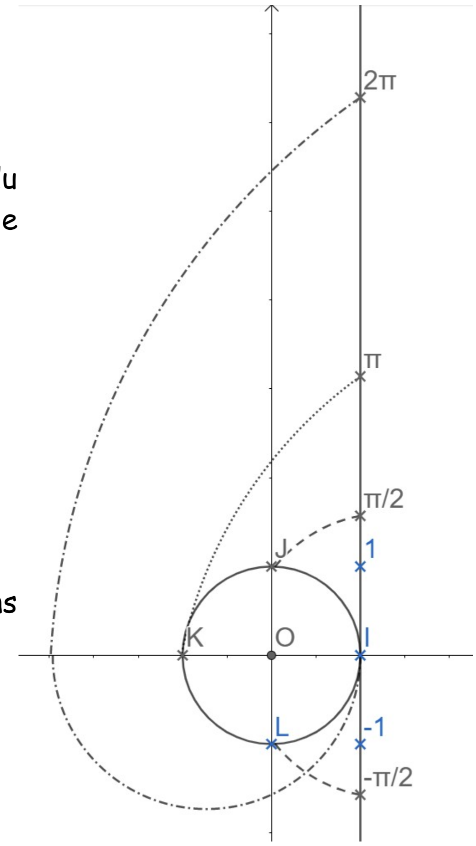


DÉFINITION

Dans le plan muni du repère (O, I, J).
Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
On dit que c'est le sens direct ou le sens trigonométrique.
Le sens indirect est le sens des aiguilles d'une montre.

2) Enroulement d'une droite autour d'un cercle trigonométrique :

On trace la droite tangente au cercle en I. et on munit cette droite du repère (I,A) avec IA=OI=1 : elle représente la droite des réels.
On entoure cette droite autour du cercle.



PROPRIÉTÉ – DÉFINITION

Chaque nombre réel de la droite vient se superposer à un point M du cercle, et on associe ainsi à tout réel x un unique point du cercle trigonométrique grâce à cet enroulement.

EXEMPLES

- Le nombre π vient se superposer à K : On dit alors que K est associé à π ou K est l'image de π.
  La longueur de l'arc IK est égale à π.

- Le point L est associé au réel $\frac{-\pi}{2}$: on a enroulé la droite dans le sens indirect, car $\frac{-\pi}{2}$ est négatif.

REMARQUE :

Un point du cercle correspond à plusieurs (une infinité) réels de la droite.
La longueur totale du cercle est $2\pi\times R=2\pi\times 1=2\pi$
Par exemple : le point J est l'image du nombre $\frac{\pi}{2}$, mais aussi des nombres : $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}+6\pi$ et $\frac{\pi}{2}-2\pi$, …
On écrit que J est l'image de tout réel de la forme $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$

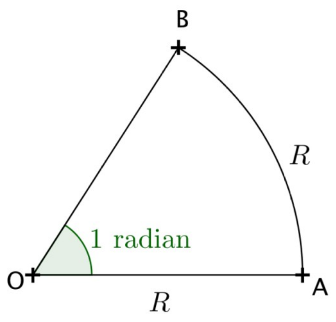
→ EXERCICES : 4p.169, n°29 à 38 p.172, n°39, 42, 43, 47 p.173

3) Radian :

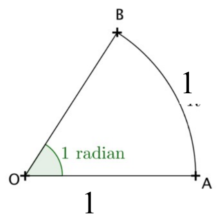
DÉFINITION :

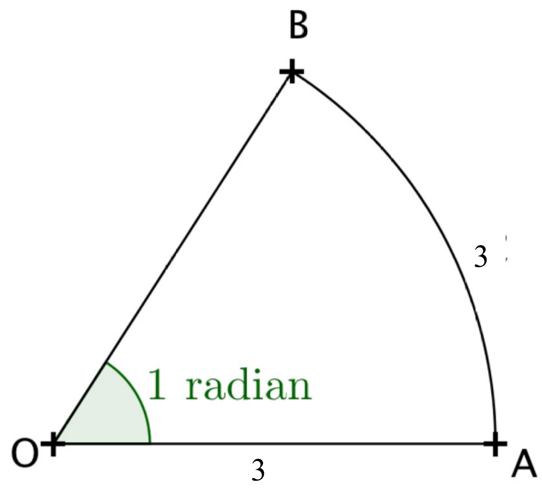
Un radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc dont la longueur est égale à son rayon.
Un angle se mesure en degrés ou en radians.

ILLUSTRATION :



EXEMPLES :





Le cercle trigonométrique a pour rayon 1 donc dans un cercle trigonométrique :
l'angle plein (de 360°) a pour mesure en radians la longueur totale du cercle, soit 2π .
Donc 360° correspondent à 2π radians.

PROPRIÉTÉ :

Les mesures en radians et les mesures en degrés sont proportionnelles :

Degrés	360	180	90	60	45	30	10
Radians	2π	π				$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{18}$

REMARQUE :

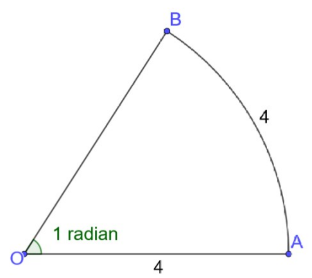
Par ce procédé, on peut calculer la mesure en degrés de 1 radian : $\frac{180}{\pi} \simeq 57{,}3$.

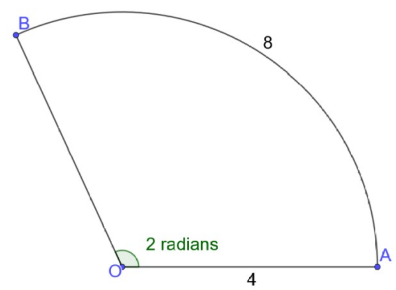
1 radian vaut environ 57,3°

PROPRIÉTÉ :

Un angle de α radians intercepte un arc de longueur $\alpha \times R$.

EXEMPLE :





L'arc AB a la même longueur que le rayon pour un angle de 1 radian (définition du radian) (fig gauche)
L'arc AB a 2 fois la longueur du rayon pour un angle de 2 radians (propriété ci-dessous) (fig droite)

II) Cosinus et sinus d'un nombre réel :

1) Définitions et propriétés :

Définition :

On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé (O, I, J) et la droite des réels, tangente au cercle en I.

On considère un réel x quelconque, et on appelle M le point du cercle trigonométrique associé à x.
- L'abscisse du point M dans le repère orthonormé (O, I, J) est le cosinus du réel x, noté $\cos x$.
- L'ordonnée du point M dans le repère orthonormé (O, I, J) est le sinus du réel x, noté $\sin x$.
- Dans le repère (O, I, J), on a donc $M(\cos x\ ;\ \sin x)$.

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- Propriété d'encadrement :

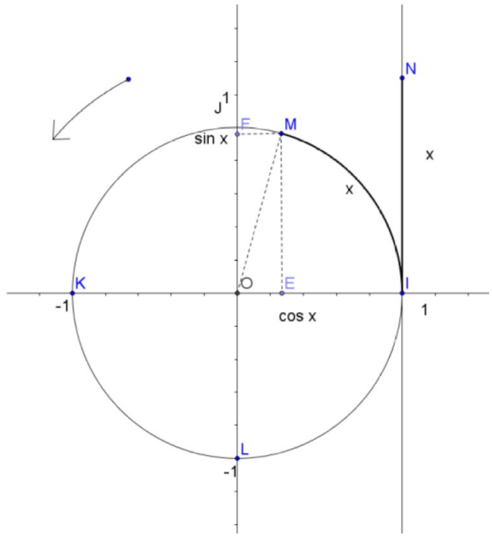
$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

- Relation fondamentale :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \text{ souvent noté : } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- Symétries : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



2) Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle :

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$ donc $\cos x = OE$ et $\sin x = OF$

Or dans le triangle rectangle OEM, on a :

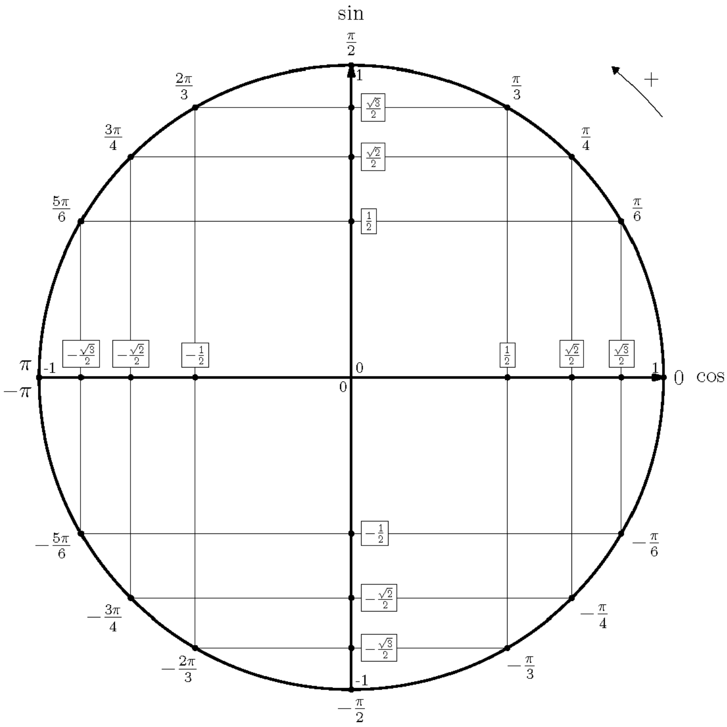
$$\cos \widehat{EOM} = \frac{OE}{OM} = \frac{OE}{1} = OE = \cos x$$

$$\sin \widehat{EOM} = \frac{EM}{OM} = \frac{OF}{OM} = \frac{OF}{1} = OF = \sin x$$

Les définitions du cosinus et du sinus d'un réel quelconque données dans ce chapitre sont cohérentes avec les définitions vues au collèges du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle.

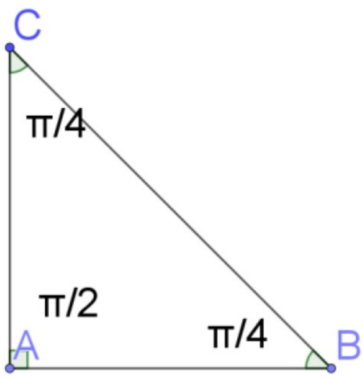
3) Valeurs remarquables des cosinus et sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Preuves :

1) Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$:



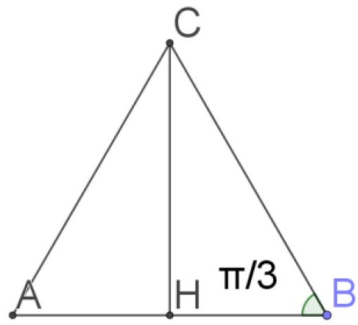
On se place dans le triangle ABC isocèle et rectangle en A.
On choisit $AC=1$
Calcul de BC :

D'après le théorème de Pythagore, on a : $BC^2=AB^2+AC^2$
Donc : $BC^2=1^2+1^2=2$ Ainsi $BC=\sqrt{2}$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{AC}{BC}$ Donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Soit $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

On se place dans le triangle ABC équilatéral de côté 1
On appelle H le pied de la hauteur issue de C.
Calcul de CH :



Dans le triangle BCH rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore :

$BC^2=CH^2+BH^2$ D'où $CH^2=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ et $CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{BH}{BC}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{CH}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

III) Fonctions sinus et cosinus

On se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définitions :

On peut définir sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \to \sin(x)$ et $x \to \cos(x)$.
La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.

1) Périodicité

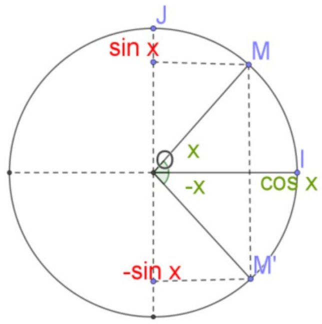
Définition :

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques (ou périodiques de période 2π).
Il suffit d'étudier ces fonctions sur $[-\pi;\pi]$ ou $[0; 2\pi]$.

Propriété :

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2) Parité



Définition

Pour tout réel x,

- $\cos(-x)=\cos(x)$, on dit que la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x)=-\sin(x)$, on dit que la fonction sinus est impaire.

<u>Remarque:</u> Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur $[0;\pi]$.

Propriété

. La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
. La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Sens de variation

Tableau de variation

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
sin(x)	0	↗	+1	↘	0	↘	-1	↗	0
cos(x)	+1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	+1

Remarques :

. La fonction cosinus atteint son maximum 1 en $2k\pi$ et son minimum -1 en $(2k+1)\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

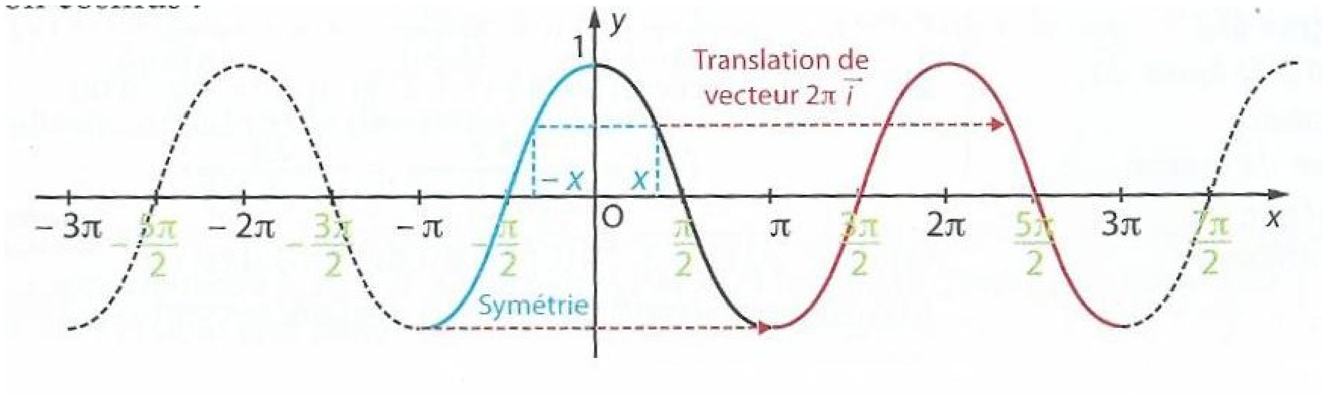
. La fonction sinus atteint son max 1 en $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et son min -1 en $\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

. On peut déduire le signe de ces fonctions à l'aide du tableau de variation.

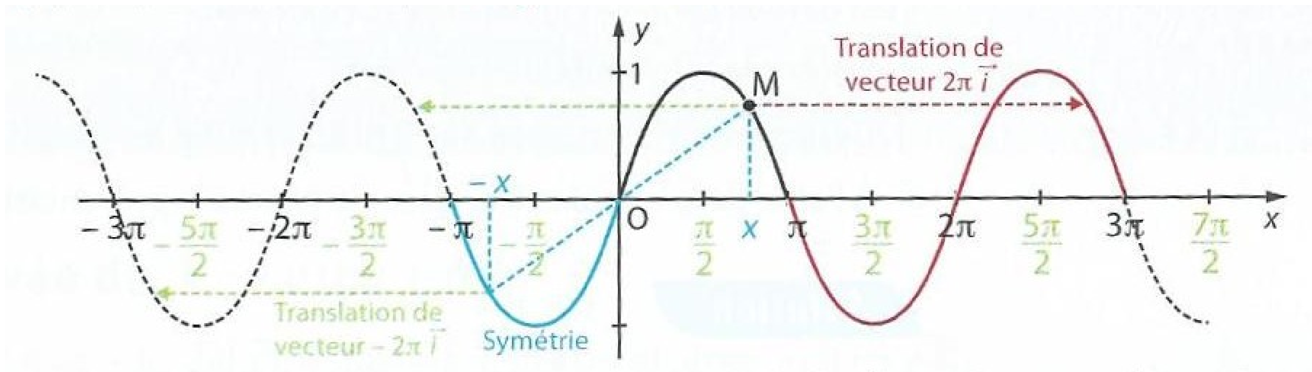
4) Courbes représentatives:

Ces courbes s'appellent des sinusoïdes.
Leur schéma se reproduit à l'identique dans toutes les périodes d'une longueur de 2 π.

Pour la fonction cosinus :
On trace la courbe sur [0 ; π], on la complète par symétrie par rapport à [0y), puis par translation.



Pour la fonction sinus :
On trace la courbe sur [0 ; π], on la complète par symétrie par rapport à 0, puis par translation.



Remarque :
Il est important de connaître les allures de chacune des ces représentations de fonctions et de les distinguer.