Chapitre 2 — Généralités sur les suites réelles

I. — Définitions et exemples

Définition 1

Une suite réelle u est une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2 :

1. La suite des puissances de 2 est la suite $u : n \mapsto 2^n$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. Ainsi, $u(0) = 2^0$, $u(1) = 2^1 = 2$, $u(2) = 2^2 = 4$, $u(3) = 2^3 = 8$, ...
2. La suite des racines carrées des entiers naturels est la suite $v : n \mapsto \sqrt{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. On a alors $v(0) = \sqrt{0} = 0$, $v(1) = \sqrt{1} = 1$, $v(2) = \sqrt{2}$, $v(3) = \sqrt{3}$, $v(4) = \sqrt{4} = 2$, ...
3. La suite des inverses des entiers naturels non nuls est la suite $t : n \mapsto \frac{1}{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}^*$. On a alors $t(1) = \frac{1}{1} = 1$, $t(2) = \frac{1}{2} = 1$, $t(3) = \frac{1}{3}$, $t(4) = \frac{1}{4}$, ...

Formellement, une suite réelle est donc une fonction $u : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{N}$. Dans la pratique, A sera le plus souvent $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ mais ce n'est pas une obligation.

Concrètement, une suite réelle u peut être vue comme la donnée d'une liste ordonnée de nombres réels auxquels on a attribué un numéro. Supposons par exemple que $A = \mathbb{N}$. On peut alors voir la suite u ainsi :

$$u(0) \qquad u(1) \qquad u(2) \qquad u(3) \qquad u(4) \qquad \cdots \qquad u(n) \qquad \cdots$$

et cette liste continue indéfiniment.

Les différents nombres de la liste sont appelés les termes de la suite. L'entier n associé au terme $u(n)$ est appelé le rang de $u(n)$.

⚠ Il ne faut pas confondre le rang d'un terme avec sa place dans la suite.

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{rang } 0 & \text{rang } 1 & \text{rang } 2 & \text{rang } 3 & \text{rang } 4 & \cdots & \text{rang } n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
u(0) & u(1) & u(2) & u(3) & u(4) & \cdots & u(n) & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
1^{\text{er}} \text{ terme} & 2^{\text{e}} \text{ terme} & 3^{\text{e}} \text{ terme} & 4^{\text{e}} \text{ terme} & 5^{\text{e}} \text{ terme} & \cdots & (n+1)^{e} \text{ terme} & \cdots
\end{array}$$

Exemple 3. On considère la suite $u : n \mapsto 5 + \sqrt{n-3}$ définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Le premier terme de cette suite est $u(3) = 5 + \sqrt{3-3} = 5 + \sqrt{0} = 5$: c'est donc le terme de rang 3.

Notation 4. On considère une suite $u : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in A$, le terme de rang n de la suite u se note $u(n)$ (« u de n ») ou u_n (« u indice n).
2. La suite u se note également $(u(n))_{n \in A}$ ou encore $(u_n)_{n \in A}$.
   Pour alléger les notations, on la notera également simplement $(u(n))$ ou (u_n).

⚠ Il ne faut pas confondre
u_n qui désigne le terme de rang n de la suite (c'est donc un nombre)
et (u_n) qui désigne la suite u (c'est donc une liste de nombres).

Exemple 5. Les trois suites u, v et t définies dans l'exemple 2 peuvent respectivement s'écrire $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

II. — Mode de génération d'une suite

Il existe différentes façons de définir concrètement (on dit aussi générer) une suite.

1) Par une expression explicite

On peut définir une suite par une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in A$.

Il s'agit de la façon dont on a défini les suites dans les différents exemples précédents.

C'est la façon la plus simple et la plus directe de définir une suite. Elle permet en particulier de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 6. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$. Alors, on peut calculer directement u_4 :

$$u_4 = \frac{2^4-1}{2^4+1} = \frac{15}{17}.$$

Exercices : 4p.23 ; 25p.26

2) Par une relation de récurrence

Une autre façon de définir une suite consiste à donner son premier terme et une relation permettant, connaissant un terme, de calculer le suivant. Une telle relation s'appelle une relation de récurrence.

C'est une façon un peu plus compliquée et surtout beaucoup moins directe de définir une suite. En particulier, pour déterminer un terme, il faut connaître le précédent.

Exemple 7. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \frac{1}{u_n+2}$. Si on veut calculer u_4, il est nécessaire de calculer tous les termes précédents. On calcule donc successivement :

$$u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{u_1+2} = \frac{1}{\frac{1}{3}+2} = \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{u_2+2} = \frac{1}{\frac{3}{7}+2} = \frac{1}{\frac{17}{7}} = \frac{7}{17}$$

$$u_4 = u_{3+1} = \frac{1}{u_3+2} = \frac{1}{\frac{7}{17}+2} = \frac{1}{\frac{41}{17}} = \frac{17}{41}$$

Il ne faut pas pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$. Dans le premier cas, on ajoute 1 à n alors que, dans le second, on ajoute 1 à u_n.

Exercices : 6 et 7 p.23 ; 22, 23 p.26

3) Par un algorithme

On peut également définir une suite par un algorithme permettant de calculer le terme d'indice n.

Exemple 8. On considère l'algorithme suivant dans lequel N désigne un entier naturel.

$U \leftarrow 1$
Tant que $U < N$
    $U \leftarrow 2U$
Fin Tant que

On définit la suite (u_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est égal à la valeur de U à la fin de l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner en prenant $N = n$.

Ainsi, pour obtenir u_5, il faut faire fonctionner l'algorithme précédent avec $N = 5$. On peut le faire à l'aide d'un tableau :

U	1	2	4	8
$U < 5$	vrai	vrai	vrai	faux

Ainsi, $u_5 = 8$.

Exercices : 30 et 31 p.26

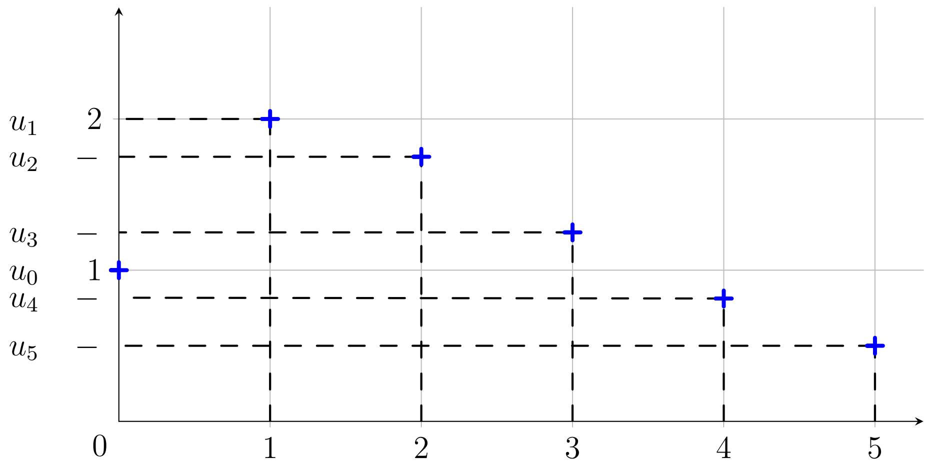
III. — Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite $u : A \to \mathbb{N}$ dans un repère par l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n) lorsque $n \in A$. Une telle représentation s'appelle une nuage de points.

L'ensemble A étant en général infini, on ne représentera dans la pratique qu'une partie du nuage de points correspondant aux premières valeurs de n.

Exemple 9. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n+1}{2^n}$.

On peut représenter la suite (u_n) par le nuage de points suivants :



Exercices : 28 et 29 p.26

IV. — Suites arithmétiques

1) Définition

Définition 1

On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

Le nombre réel r doit être indépendant de l'indice n de la suite. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$ n'est pas arithmétique car le nombre 2^n dépend de l'indice n.

Exemple 2.

1. La suite (u_n) des entiers naturels définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1$.
2. Dans un tirelire, on place 50 euros. Puis, tous les mois, on met 10 euros dans la tirelire. Le nombre u_n d'euros dans la tirelire après n mois est une suite arithmétique de raison 10 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$.

Méthode 3 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r, il suffit de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = r$.

Attention, le résultat r doit être une constante indépendante de n.

Exemple 4. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5n + 7$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 7 - (-5n + 7) = -5n - 5 + 7 + 5n - 7 = -5$$

donc (u_n) est une suite arithmétique de raison -5.

Méthode 5 : Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Pour montrer qu'une suite (u_n) n'est pas arithmétique, il suffit de déterminer deux indices p et q tels que $u_{p+1} - u_p \neq u_{q+1} - u_q$.

Exemple 6. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$. Alors, $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2^2 + 1 = 5$.
Dès lors, $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ ce qui suffit pour conclure que (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercices : 36, 37, 39, 40 p.27 , 107p.35

2) Forme explicite et et représentation graphique

Propriété 6

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u0 alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Exemple 7.

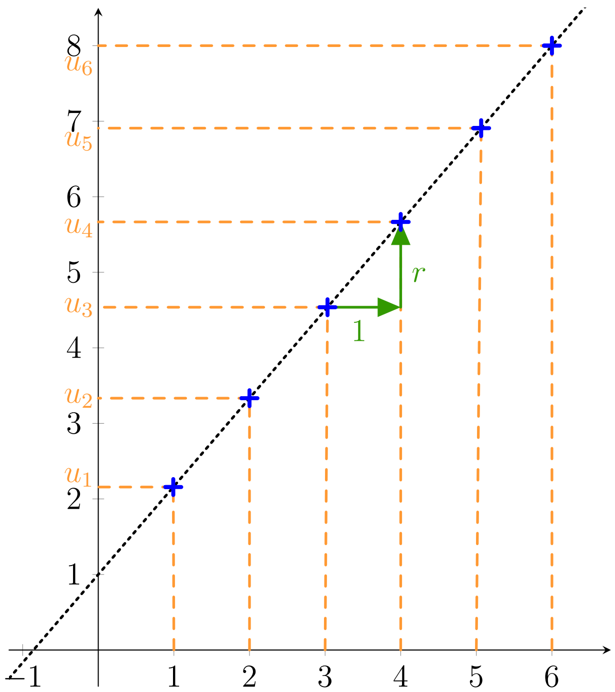
1. Si (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 3n$.
2. Si (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 + (n-3)(-4) = 14 - 4n$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\, n + 2$ alors (w_n) est la suite arithmétique de raison $-$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Exercices : 43, 44, 45, 49p.27

Propriété 8

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r.

Démonstration. Considérons un entier $p \geqslant N$. D'après la propriété 10, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = u_p + (n-p)r$ i.e. $u_n = u_p - pr + nr$. Posons $b = u_p - pr$ et $f : x \mapsto rx + b$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = f(n)$. Or, f est une fonction affine dont le coefficient de x est r donc sa courbe représentative est une droite $\mathcal{D}$ de coefficient directeur r. Par définition, les points de coordonnées (n, u_n) appartiennent à $\mathcal{D}$ pour tout $n \geqslant N$ donc le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur $\mathcal{D}$. □



Remarque : Ainsi, les suites arithmétiques sont en quelques sorte l'équivalent pour les suites des fonctions affines.

3) Sommes de termes consécutifs

Propriété 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_n = 1+2+3+\cdots+n$. Alors, en considérant les termes de la somme dans l'ordre inverse, on a aussi $S_n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$. Ainsi,

$$S_n + S_n = (1+2+3+\cdots+n)+(n+n-1+n-2+\cdots+1)$$

En regroupant le terme de même couleur, il vient

$$2S_n = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n+1).$$

Or, toutes les parenthèses valent $n+1$ et il y a autant de parenthèses que de termes dans la somme de départ c'est-à-dire n. Ainsi, $2S_n = n \times (n+1)$ donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Exemple 10. La somme des entiers naturels de 1 à 100 est égale à $\frac{100\times 101}{2} = 5050$.

Théorème 11. — Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers p et n tels que $n \geqslant p \geqslant N$,

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

□

Remarque 12.

1. La formule précédente ne nécessite pas de connaître la raison de la suite mais seulement le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes de la somme.
2. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

Exemple 13. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = -3$ et $u_{15} = 13$. Alors,

$$u_5+u_6+u_7+\cdots+u_{15} = (15-5+1)\frac{-3+13}{2} = 55.$$

Exercices : 55,56 p.28 , 16p.25 , 60p.28 , 106 p.35

Exercices bilan : 93p.32, 97p.33, 102p.34, 127p.37, 138p.39

V. — Suites géométriques

1) Définition

Définition 14

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Dans ce cas, le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).

Comme pour les suites arithmétiques, la raison q ne doit pas dépendre de l'indice n. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$ n'est pas géométrique car le nombre $n+1$ dépend de l'indice n.

Exemple 15.

1. La suite (u_n) des puissances de 2 définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
2. Sur un compte en banque, il y a initialement 2000 euros. Ce compte rapporte 2% par an. Le nombre u_n d'euros sur le compte après n années est une suite géométrique de raison 1,02 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = (1 + 0{,}02)u_n = 1{,}02u_n$.

Exercices : 61, 64, 65p.28

Méthode 16 : Comment montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est géométrique de raison q, on transforme, pour tout $n \geqslant N$, u_{n+1} afin de de l'écrire sous la forme qu_n.

Attention, le résultat q doit être une constante indépendante de n.

Exemple 17. Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(-3)^{n+2}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2(-3)^{n+3} = 2(-3)^{n+2+1} = (-3) \times 2(-3)^{n+2} = (-3)u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison -3.

Méthode 18 : Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ n'est pas géométrique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_p \neq 0$, $u_q \neq 0$ et $\frac{u_{p+1}}{u_p} \neq \frac{u_{q+1}}{u_q}$.

Exemple 19. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$. Alors, $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2^2 + 1 = 5$. Dès lors, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ ce qui suffit pour conclure que (u_n) n'est pas géométrique.

Remarque 20. Si $(u_n)_{n\geqslant N}$ est une suite géométrique de raison $q = 0$ alors, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = 0 \times u_n = 0$ donc, sauf éventuellement le premier terme, tous les termes de la suite sont égaux à 0.

Ce cas n'ayant pas beaucoup d'intérêt, dans la suite, on supposera souvent $q \neq 0$ ce qui n'est pas très restrictif.

Exercices : 99 et 100p.34

2) Forme explicite

Propriété 21

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$$

Si la suite (u_n) est définie seulement à partir du rang 1, on obtient la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}$$

Et de manière plus générale :

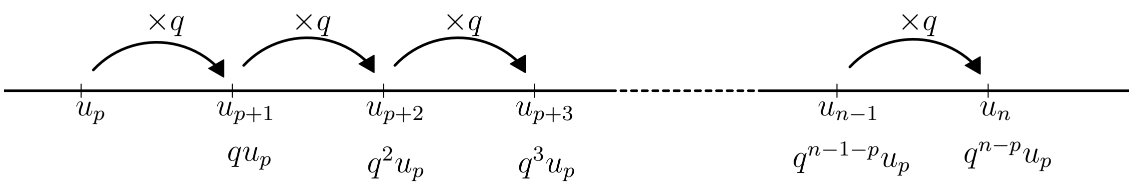
Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = u_{\mathrm{p}}\, q^{n-\mathrm{p}}$$

Démonstration de la formule générale :

Condition nécessaire. Supposons que (u_n) est géométrique de raison q. Soit p et n deux entiers supérieurs ou égaux à N.

1er cas. Supposons que $n \geqslant p$. Alors, l'évolution des termes de la suite (u_n) est décrite par le schéma suivant :



Ainsi, entre u_p et u_{p+1}, on multiplie par q, entre u_p et u_{p+2}, on multiplie par q^2, entre u_p et u_{p+3}, on multiplie par q^3 et ainsi de suite. En remarquant que $u_n = u_{p+(n-p)}$, entre u_p et u_n, on multiplie exactement $n - p$ fois par la raison q donc $u_n = q^{n-p}u_p$.

2e cas. Si $n < p$, en échangeant le rôle de n et p dans l'égalité ci-dessus, il vient $u_p = q^{p-n}u_n$ donc $u_n = \frac{1}{q^{p-n}} u_p = q^{-(p-n)}u_p = q^{n-p}u_p$. Ainsi, l'égalité est démontrée dans tous les cas.

Condition suffisante. Réciproquement, supposons que, pour tous entier p et n supérieurs ou égaux à N, $u_n = q^{n-p}u_p$. Soit un entier $p \geqslant N$ quelconque. Soit un entier $n \geqslant N$. Alors, par hypothèse, $u_n = q^{n-p}u_p$ et $u_{n+1} = q^{n+1-r}u_p$ donc

$$u_{n+1} = q^{n-r+1}u_p = q \times q^{n-p}u_p = q \times u_n$$

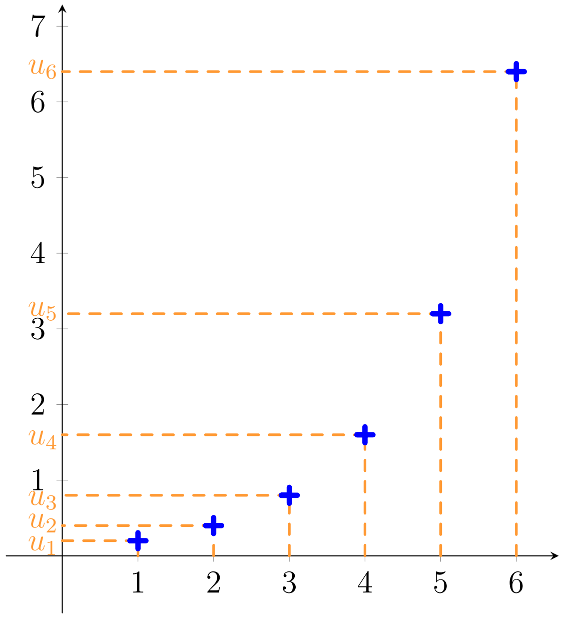
donc (u_n) est géométrique de raison q.

Exemple 22.

1. Si (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 3^n$.
2. Si (v_n) est la suite géométrique de raison $q = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 \times (-4)^{n-3}$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4(-\frac{1}{5})^n$ alors (w_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Exercices : 68, 70, 72p.29

Une variation exponentielle se caractérise notamment par une croissance très rapide si $q > 1$ et $u_N > 0$. Pour $q = 2$, $N = 1$ et $u_1 = 0{,}1$, on obtient le nuage de point suivant.



3) Somme de termes consécutifs

Propriété 23

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
2. Si $q = 1$ alors $S_n = n + 1$.

Démonstration.

1. Remarquons que
$$qS_n = q(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q_n + q_{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$$
donc $qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$ i.e. $(q-1)S_n = q^{n+1} - 1$. Comme $q \neq 1$, $q - 1 \neq 0$ et donc, en divisant par $q - 1$, il vient
$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
2. Si $q = 1$ alors, pour tout entier naturel k, $q^k = 1$ donc $S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ fois}} = n + 1$.

□

Exemple 38. La somme des puissances de 2 de 1 à 2^{10} est égale à $\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.

Théorème 24. — Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite géométrique de raison q. Soit p et n des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant N$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p.$$

Démonstration. D'après la propriété 21, pour tout entier $k \geqslant 0$, $u_{p+k} = u_p q^k$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n &= u_p + u_p q + u_p q^2 + \cdots + u_p q^{n-p} \\ &= u_p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p}) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la propriété 23.

1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p} = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ donc
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

2. Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p} = n-p+1$ donc
$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = u_p(n-p+1) = (n-p+1)u_p.$$

$\square$

Remarque 25. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par

$$(1^{\text{er}}\ \text{terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

Exemple 26. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Alors,

$$u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{10} = \text{u3} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{10-3+1}}{1-\frac{1}{2}} = u_3 \times \frac{1-\frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}} = u_3 \times \frac{2}{1} \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) = 2u_3 \times \frac{255}{256}.$$

Or, $u_3 = u_0(\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{8}$donc

$$u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{10} = \frac{5}{4} \times \frac{255}{256} = \frac{1275}{1024}.$$

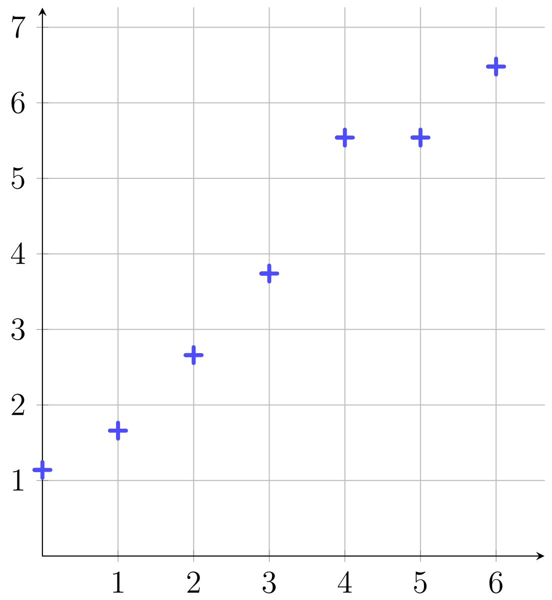
Exercices : 77, 78 p.29 et 114p.26

VI. — Variations

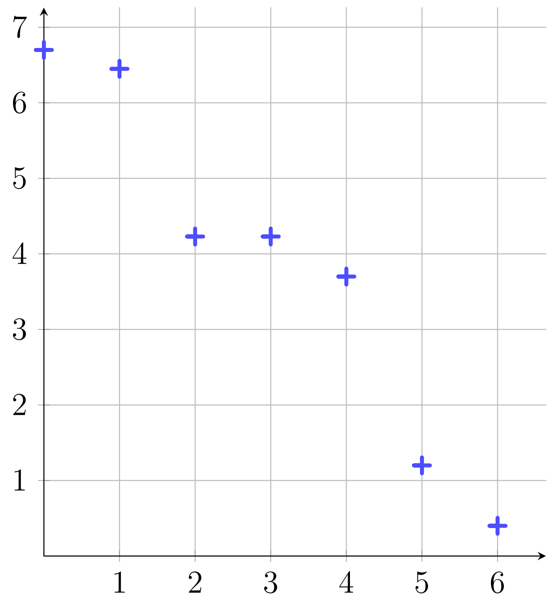
Définition 27

Soit N un entier naturel et (u_n) une suite réelle définie (au moins) à partir du rang N. On dit que :

— (u_n) est **croissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
— (u_n) est **décroissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
— (u_n) est **constante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n$;
— (u_n) est **monotone** à partir du rang N si (u_n) est croissante ou décroissante à partir du rang N.



Nuage de points d'une suite croissante



Nuage de points d'une suite décroissante

Remarque 28.

1. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$. En effet, si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et $(-1)^{n+1} = (-1)\times(-1)^n = -1$ donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ mais, si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1)^n = 1$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) change constamment de variation. C'est le cas de toute les suites qui ont un signe qui change en fonction de la parité de n. Ces suites sont appelées des suites alternées.

2. Si, dans la définition 1, les inégalités sont strictes, on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

3. Par définition, les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes et ce sont les seules à posséder cette propriété.

On se donne une suite (u_n) définie sur A. Pour étudier les variations de (u_n), on dispose de plusieurs méthodes.

Méthode 1

Par une Comparaison directe

On peut essayer de comparer directement, pour tout $n \in A$, les nombres u_n et u_{n+1}.

Exemple . — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{2\,n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $n \leqslant n+1$ donc, comme $2 \geqslant 0$, $2n \leqslant 2(n+1)$ et donc $2n+1 \leqslant 2(n+1)+1$. De plus, comme $n \geqslant 0$, $0 < 2n+1 \leqslant 2(n+1)+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que $\dfrac{1}{2n+1} \geqslant \dfrac{1}{2(n+1)+1}$ i.e. $u_n \geqslant u_{n+1}$.

On conclut donc que (u_n) est décroissante.

Méthode 2

Par l'étude du signe de la différence

On peut étudier, pour tout $n \in A$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in A$. Si, pour tout $n \in A$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et, si pour tout $n \in A$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Exemple . — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 5n + 1$.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 1 = n^2 - 3n - 3$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - 3n - 3 - (n^2 - 5n + 1) = n^2 - 3n - 3 - n^2 + 5n - 1 = 2n - 4$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2n \geqslant 4 \Leftrightarrow n \geqslant 2$$

donc (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Méthode 3

Comparer le rapport avec 1 si la suite est strictement positive ⚠

On suppose que, pour tout $n \in A$, $u_n > 0$. On peut étudier, pour tout $n \in A$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer avec 1. Si, pour tout $n \in A$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors, comme $u_n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors, de même, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.

Exemple — Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$.

Comme $5 > 0$ et $7 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n > 0$ et $7^n > 0$ donc $u_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}}{\frac{5^n}{7^n}} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{5^n} = \frac{5 \times 5^n}{7 \times 7^n} \times \frac{7^n}{5^n} = \frac{5}{7} \leqslant 1$$

donc (u_n) est décroissante.

Méthode 4

Une suite du type Un=f(n) a ses variations semblables à celles de la fonction f.

On étudie les variations de la fonction f et on les transpose à la suite (u_n).

Exercices : 9, 12, 14, 42, 24, 26 p.48 à 50

Cas particuliers pour les suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r :

(u_n) est strictement **croissante** si r>0
(u_n) est strictement **décroissante** si r<0
(u_n) est **constante** si r=0

Exemples .
Une suite arithmétique de raison -3 est décroissante.
Une suite arithmétique de raison 10^{-2} est croissante. Rappel : $10^{-2} = 0.01$

Remarque sur les limites :
Une suite arithmétique de raison r>0 a pour limite + infini
Une suite arithmétique de raison r<0 a pour limite - infini

Exercices n°10, 11p.48

Cas particuliers pour les suites géométriques

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme Uo. On suppose que Uo>0

Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement **croissante**
Si $q = 1$ alors (u_n) est **constante** égale à Uo.
Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement **décroissante.**
Si $q = 0$ alors (u_n) est constante, égale à 0 à partir du rang 1
Si $q < 0$ alors (u_n) n'est pas monotone

Exemples .
Une suite géométrique de raison 1/2 et de premier terme 3 est décroissante.
Une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1/2 est croissante.

Remarque sur les limites :
Une suite géométrique de raison q > 1 a pour limite + infini ou - infini selon le signe de Uo.
Une suite géométrique de raison 0 < q < 1 a pour limite 0
Une suite géométrique de raison q < 0 n' a pas de limite

Exercices n°37, 38, 39 p.50, 54p.51, 103p.61

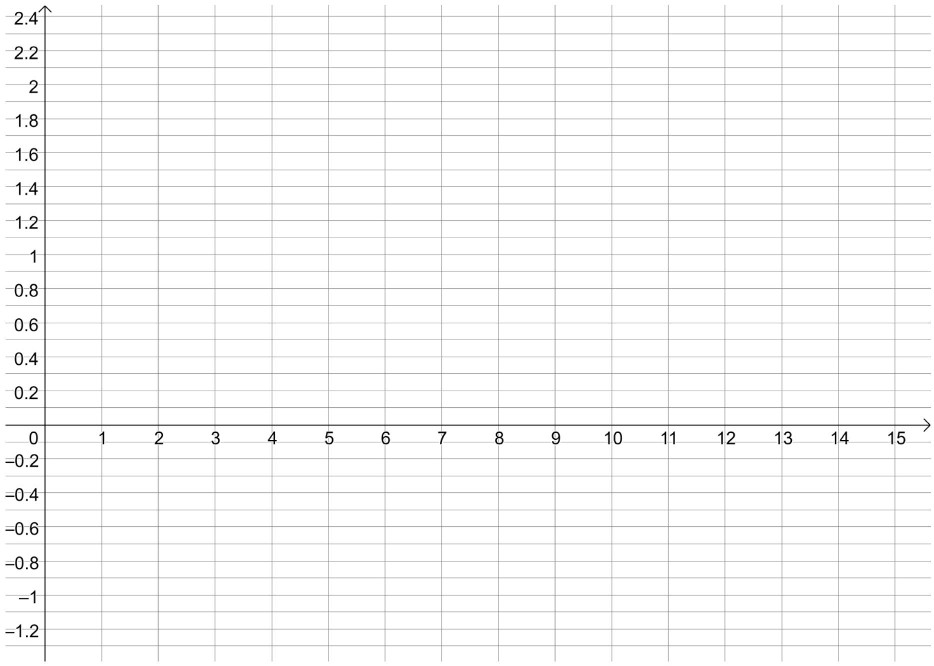
VII - Limite de suite :

1) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $u_n = \dfrac{10n-1}{5n+1}$

a) A la calculatrice, faire afficher le tableau de valeurs de la suite (u_n) et compléter

n															
u_n															

b) Dans le repère ci-contre, représenter la suite (u_n) :



c) Que remarque-t-on lorsque n tend vers $+\infty$?

On dit que

On note :

2) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n $(n \in \mathbb{N})$ par : $v_n = n^2 + 2n - 3$
A l'aide de la calculatrice, compléter :

$v_0 =$ $\quad$ $v_1 =$ $\quad$ $v_2 =$ $\quad$ $v_3 =$ $\quad$ $v_4 =$ $\quad$ $v_5 =$ $\quad$ $v_6 =$

Comment évoluent les termes de la suite ?

On dit que

On note :

3) Conjecturer la limite de la suite (t_n) définie par $\begin{cases} t_0 = -1 \\ t_{n+1} = 2 \times t_n \end{cases}$ utilisant une notation :

4) Que peut-on dire de la suite (w_n) définie pour tout n $(n \in \mathbb{N})$ par : $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$?

Exercices n°55, 56, 57, 60, 61, 63, 64, 68, 77p.52 à 56 $\quad$ **Exercices Bilan : n°85, 90, 95, 115p.58 à 63**