FICHE METHODE
Dérivation en 1ère S

§ 1 : Comment calculer un nombre dérivé ?

Méthode 1 : on revient à la définition du nombre dérivé d'une fonction en un réel a.
Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non réduit à un point) et a un réel appartenant à I. On dit que f est dérivable en a si la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe **et** est finie. Cette limite se note $f'(a)$ et s'appelle le **nombre dérivé** de f en a.

Remarque : on utilise cette méthode pour calculer la dérivée des fonctions usuelles. Dans la pratique, elle est peu employée sauf dans des exercices théoriques ou si c'est explicitement précisé dans l'énoncé.

Exemple : En revenant à la définition du nombre dérivé, calculer $f'(2)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2+3x-1$.
Solution : On justifie d'abord que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en remarquant que c'est une fonction polynôme.
Étape 1 : On transforme l'écriture $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ (ici a = 2 comme on veut calculer $f'(2)$).
Soit $h\neq 0$. $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2(2+h)^2+3(2+h)-1-(-2\times 2^2+3\times 2-1)}{h}$, soit
$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2(4+4h+h^2)+6+3h-1-(-3)}{h} = \frac{-2h^2-5h}{h} = -2h-5$.

Etape 2 : on conclut en faisant tendre h vers 0.
$-2h-5$ tend vers -5 lorsque h tend vers 0. On en déduit que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = -5$.

Un bon exercice théorique utilisant la définition de $f'(a)$ consiste à démontrer toutes les formules opératoires sur la dérivation. Faire l' exercice 81 p79.

Méthode 2 : on utilise le tableau des dérivées usuelles et celui des règles opératoires.
Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par $f(x) = \frac{5x^2-2x+4}{x+3}$. Calculer $f'(x)$ après avoir justifié son existence. En déduire le nombre dérivé de f en 0.

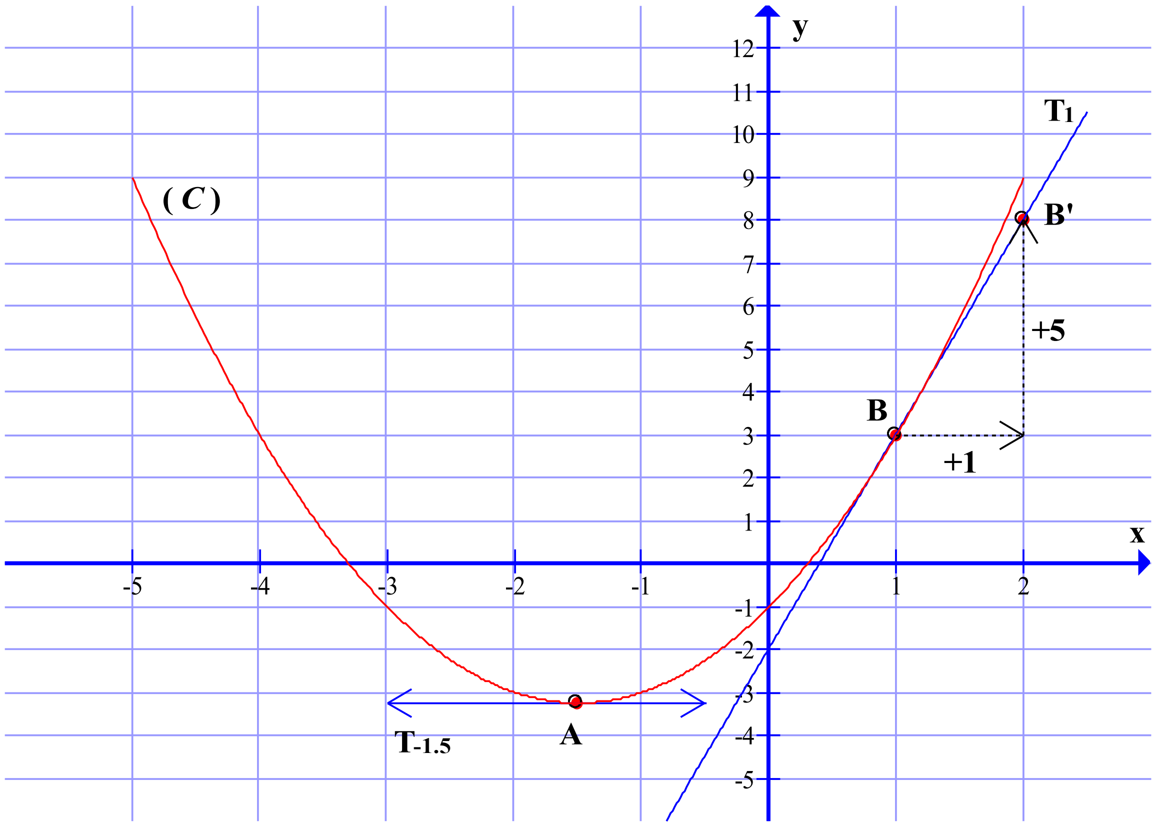
Solution : f est dérivable sur]-∞ ; -3[et sur]-3 ; +∞[comme quotient de deux fonctions dérivables sur]-∞ ; -3[et sur]-3 ; +∞[. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 5x^2-2x+4$ et $v(x) = x+3$. $u'(x) = 10x-2$ et $v'(x) = 1$. On a donc pour tout réel x différent de – 3 : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{(10x-2)(x+3)-1\times(5x^2-2x+4)}{(x+3)^2}$, soit après simplifications : $f'(x) = \frac{5x^2+30x-10}{(x+3)^2}$. On a donc $f'(0) = -\frac{10}{9}$.

§ 2 : Comment lire graphiquement un nombre dérivé ?

Une *propriété* importante du cours précise que :
Le nombre dérivé de f en a : $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Autrement dit : lire la valeur de $f'(a)$ à l'aide d'un graphique, c'est déterminer le coefficient directeur d'une droite particulière.

Exemple : On donne ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $D = [-5;2]$. On a représenté les tangentes à (C) aux points A et B d'abscisses respectives -1,5 et 1.



A l'aide de la courbe représentative de f, déterminer $f'(-1{,}5)$ et $f'(1)$.

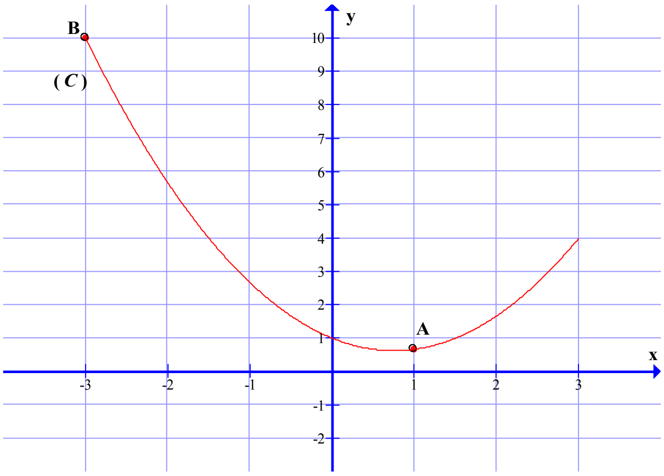
Solution :

1. $f'(-1{,}5)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse -1,5, c'est-à-dire la tangente à (C) au point A. Or cette dernière est horizontale. Son coefficient directeur est donc nul. On en déduit que $f'(-1{,}5) = 0$.
2. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 1, c'est-à-dire la tangente à (C) au point B. On détermine à l'aide du graphique un point B' (dont les coordonnées sont parfaitement lisibles) autre que B appartenant à T_1 . Le coefficient directeur de T_1 est égal à $\dfrac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B}$ $\left(\dfrac{\text{accroissement vertical}}{\text{accroissement horizontal}}\right)$, soit $\dfrac{8-3}{2-1} = \dfrac{5}{1} = 5$. On en déduit que $f'(1) = 5$.

§ 3 : Comment tracer précisément une tangente ?

Pour cela, on doit pouvoir calculer précisément le nombre dérivé d'une fonction en un réel donné (se reporter au paragraphe 1), puis se servir de son interprétation graphique (donnée au paragraphe précédent).

Exemple : Soit f la fonction définie sur D = [-3 ; 3] par $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - x + 1$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f.



Tracer précisément la tangente à (C) aux points A et B d'abscisses respectives 1 et -3.

Solution : On justifie d'abord que f est dérivable sur D car c'est une fonction polynôme et pour tout réel x de D on a $f'(x) = \frac{4}{3}x - 1$. De ceci, on en déduit que $f'(1) = \frac{1}{3}$ et $f'(-3) = -5$.

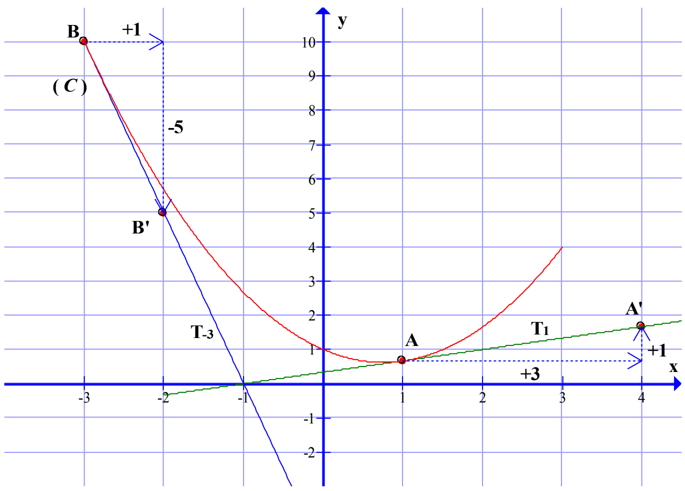
Tracé de T_A, tangente à (C) au point A d'abscisse 1 :

On sait que T_A passe par A et a pour coefficient directeur $f'(1) = \frac{1}{3}$. Pour pouvoir tracer T_A, il suffit donc d'en connaître un autre point A' autre que A, et de relier A à A'. C'est la connaissance du coefficient directeur de T_A qui va nous permettre de le faire.

Partant de A, on avance vers la droite de trois unités (accroissement horizontal égal à 3) puis on monte d'une unité (accroissement vertical égal à 1). On obtient alors le point A' recherché.

Tracé de T_B, tangente à (C) au point B d'abscisse -3 :

Même raisonnement en remarquant que $-5 = \frac{-5}{1}$.



§ 4 : Comment déterminer précisément l'équation d'une tangente ?

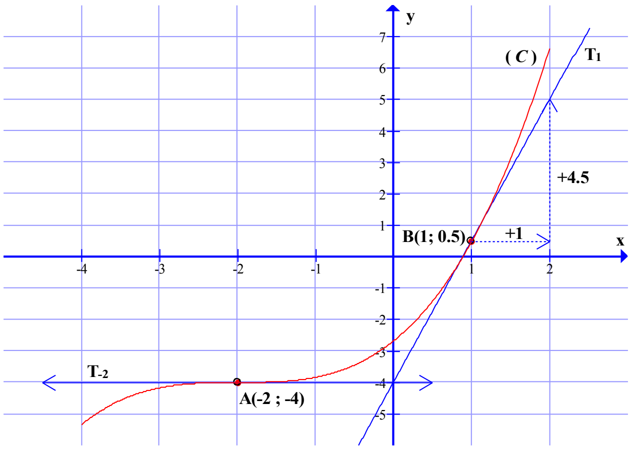
Méthode 1 : Méthode graphique.

Mettons tout de suite un bémol : les graphiques doivent être suffisamment précis pour l'employer.

On se souvient également que l'équation d'une droite (non verticale) peut s'écrire sous la forme $y = mx+p$, où m est le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

Le but est donc de déterminer à l'aide du graphique m et p.

Exemple : Soit f la fonction définie sur D = [-4 ; 2] et dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous. On a représenté les tangentes à (C) aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 1.



Déterminer sous la forme $y = mx+p$ les équations des droites T_{-2} et T_1 , tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives -2 et 1.

Solution :

La tangente à (C) au point A d'abscisse -2 est horizontale. Son coefficient directeur est donc nul. On a donc $m = f'(-2) = 0$. Par ailleurs, T_{-2} coupe l'axe des ordonnées en un point qui a pour ordonnée -4 . On en déduit $p = -4$. Ainsi, T_{-2} a pour équation $y = -4$.

Pour déterminer l'équation réduite de T_1 , on commence par trouver son coefficient directeur m. On a vu au paragraphe 2 que $m = f'(1)$ (propriété du cours). A l'aide du graphique, on a $f'(1) = \frac{4,5}{1} = 4,5$. Donc $m = 4,5$. Par ailleurs, T_1 coupe l'axe des ordonnées en un point qui a pour ordonnée -4 . On en déduit $p = -4$. Ainsi, T_1 a pour équation $y = 4,5x-4$.

Méthode 2 : Avec le calcul.

L'équation de la tangente à (C), courbe représentative de f au point d'abscisse a, a pour équation : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f, fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1+3\cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = 2-3\sin x$. On a $f(\frac{\pi}{2}) = \pi+1$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$. On en déduit que l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ s'écrit : $y = -1\times(x-\frac{\pi}{2})+\pi+1$, soit $y = -x+\frac{3\pi}{2}+1$.