PROBABILITÉS : CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

I) Probabilités conditionnelles.

1) Définition :

DÉFINITION :

Soit P une probabilité sur un univers Ω ; soit A un évènement de probabilité non nulle.

Pour tout évènement B, on appelle **probabilité de B sachant A** le réel, noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

PROPRIÉTÉS

1) P_A (dite probabilité conditionnelle), **est une probabilité** définie sur Ω.
En effet P_A vérifie les propriétés d'une probabilité :

$$P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$$P_A(\emptyset) = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

Et pour tous évènements B et C incompatibles ($B \cap C = \emptyset$),
on a : $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

2) $P_A(A) = 1$

3) Si A et B sont incompatibles, $P_A(B) = 0$

4) $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

Preuves :

2) $P_A(A)=P\frac{(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

3) $P_A(B)=P\frac{(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$ car A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \emptyset$.

4) $P_A(\bar{B})=P\frac{(A\cap \bar{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}$ car $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})$

Donc $P_A(\bar{B})=1-P\frac{(A\cap B)}{P(A)}=1-P_A(B)$

2) Probabilité d'une intersection:

Soient A et B des évènements de probabilité non nulle, on a :

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, donc $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)$

De même : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, donc $P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$

On en déduit que :

> Pour tous évènements A et B de probabilité non nulle,
>
> $$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

<u>Remarque :</u> Si $P(A)$ = 0 ou $P(B)$ = 0, alors $P(A \cap B)$ = 0.

3) Représentation par un arbre pondéré :

<u>Exemple :</u>

Une entreprise de location loue de voitures et des deux-roues.

80 % des véhicules loués sont des voitures. Parmi ceux qui louent des voitures, 60 % contractent l'assurance. Parmi les loueurs de deux-roues, 95 % contractent l'assurance.

On considère les évènements V : « Le client a loué une voiture » et
A : « Le client a contracté une assurance ».

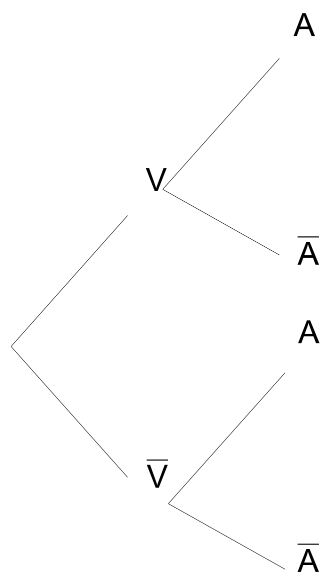
On peut représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré, en respectant certaines règles.

<u>Règle 1 :</u> Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.

<u>Règle 2 :</u> Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

<u>Règle 3 :</u> La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

<u>Règle 4 :</u> Le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces évènements.
Par exemple, ici : $P(V\cap\bar{A})=0{,}80*0{,}40=0{,}32$



<u>Règle 5 :</u> La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.

Par exemple, ici : $P(A) = P(A \cap V) + P(A \cap \bar{V}) = 0{,}8\times0{,}6+0{,}20\times0{,}95=0{,}67$

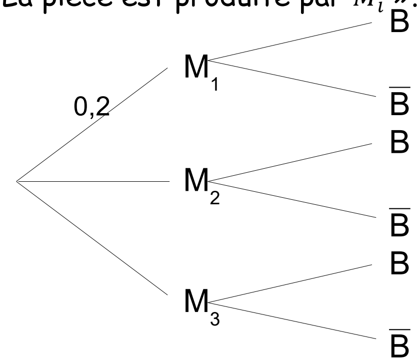
Exercices : 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20 p.267 et 268

II) Formule des probabilités totales.

1) Exemple :

Trois machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20 %, 30 % et 50 % de la production d'une entreprise. On estime à 1,5 %, 2 % et 1 % les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3. On choisit une pièce au hasard dans la production.

L'objectif est de calculer la probabilité de l'évènement B : « La pièce est bonne ».
Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'évènement : « La pièce est produite par M_i ».
On peut illustrer la situation par un arbre pondéré :



On calcule les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'évènement B : ce sont les chemins $-M_1 - B$, $-M_2 - B$ et $-M_3 - B$.

B est la réunion de ces évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B)$$

On peut détailler les calculs dans le tableau suivant :

	B	$\overline{B}$	
M_1	0,2 × 0,985	0,2 × 0,015	$P(M_1) = 0{,}2$
M_2	0,3 × 0,98	0,3 × 0,02	$P(M_2) = 0{,}3$
M_3	0,5 × 0,99	0,5 × 0,01	$P(M_3) = 0{,}5$
	$P(B) = 0{,}986$	$P(\overline{B}) = 0{,}014$	1

2) Cas général : Formule des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \dots , A_n$ sont des sous-ensembles non vides de Ω, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω, on dit qu'ils constituent une partition de Ω.

Théorème (admis) :

Si $A_1, A_2, \dots , A_n$ constituent une partition de Ω et B est un évènement quelconque de Ω, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Exercices : 34, 36, 40, 41, 70 p.270 à 277

III) Indépendance.

1) Évènements indépendants :

On suppose que A et B sont deux évènements tels que $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles.

Si le fait que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit, on dit alors que B est indépendant de A, ce qui signifie que $P_A(B) = P(B)$.

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$,il en résulte que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Alors $P(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P_B(A)$, donc A est indépendant de B.

<u>DÉFINITION :</u>

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Dans ce cas, si $P(A) \times P(B) \neq 0$, alors : $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$
si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) =0$.

<u>Remarque :</u>
Pour des évènements A et B de probabilités non nulles, il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

« A et B incompatibles » signifie $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.
« A et B indépendants » signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc $P(A \cap B) \neq 0$.

Si A et B sont incompatibles, alors ils ne sont pas indépendants, et s'ils sont indépendants, alors ils ne sont pas incompatibles.

<u>Exemple :</u>
On lance un dé à 6 faces équilibré. On considère les évènements suivants :
A: « Le résultat est pair »
B: « Le résultat est 2 »
C: « Le résultat est supérieur ou égal à 5 »
Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C ? Les évènements B et C ?

1) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$ et $P(B)=\dfrac{1}{6}$ d'où $P(A)\times P(B)=\dfrac{1}{12}$

Ainsi $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

2) $P(A\cap C)=\dfrac{1}{6}$, $P(A)=\dfrac{1}{2}$ et $P(C)=\dfrac{1}{3}$ d'où $P(A)\times P(C)=\dfrac{1}{6}$ Ainsi $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$ donc A et C sont indépendants.

3) B et C sont incompatibles donc ne sont pas indépendants.

Conseil : Pour savoir si 2 événements sont indépendants, ne vous fiez surtout pas à votre intuition mais calculez plutôt $P(A)\times P(B)$ et de $P(A\cap B)$!

Exercices : 23, 24, 25, 27 p.269

2) Passage aux évènements contraires :

Théorème :

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Preuve :

A et B sont indépendants donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or A et $\bar{A}$ sont deux évènements incompatibles dont la réunion est l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

D'où : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$$= (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

Donc $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

3) Épreuves indépendantes :

DÉFINITION :

On appelle succession de deux épreuves indépendantes la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire deux fois, les résultats de la première épreuve n'influençant pas ceux de la seconde.

Remarques :

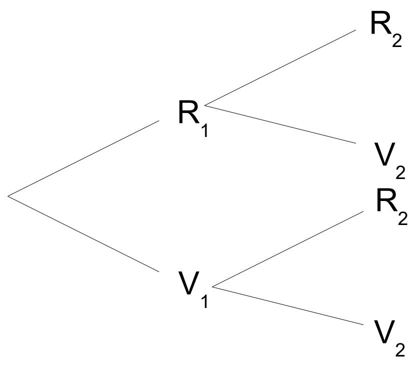
- Lors de la succession de deux épreuves indépendantes, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler une succession de deux épreuves indépendantes à deux tirages successifs avec remise.
- Pour représenter une succession de deux épreuves indépendantes, on peut utiliser un arbre pondéré à deux niveaux. Les évènements et leurs probabilités restent les mêmes entre le premier et le second niveau de l'arbre.

Exemple :

Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge. On tire successivement et avec remise deux boules.

- Le résultat du second tirage n'est pas influencé par celui du premier tirage.
  C'est une succession de deux épreuves indépendantes.

- On peut utiliser un arbre pondéré pour représenter les deux tirages indépendants. Les probabilités sont alors identiques dans les deux niveaux.



La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :

$$P(R_1 \cap R_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Exercices :44, 47 p.271
Bilan : 57, 58, 75, 89, 92 p.274 à 281