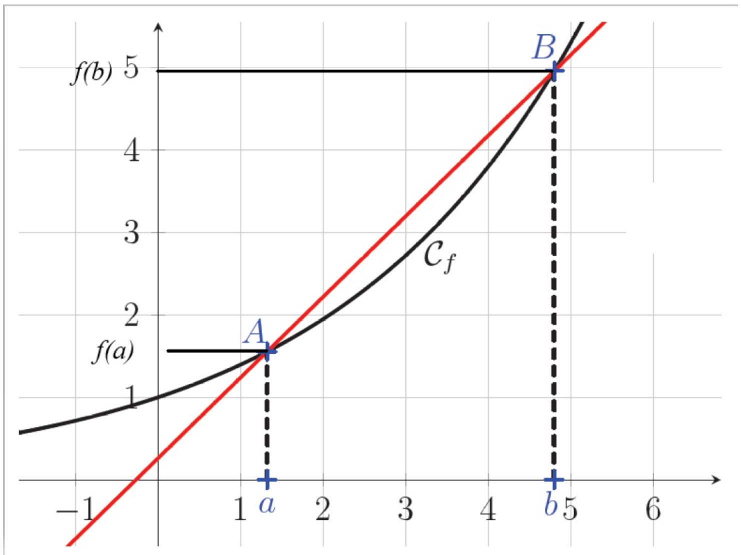
Nombre dérivé

1) Sécante et taux de variation :

Dans tout ce paragraphe, f une fonction définie sur un intervalle I.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On désigne par a et b deux éléments de I tels que $a \neq b$.

Définition :
La droite passant par les points $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$ est appelée sécante à C_f aux points d'abscisse a et b.



Définition :
Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur (ou « pente ») de la sécante à C_f aux points d'abscisse a et b. c'est donc le nombre :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{ou bien} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \left(\text{retenir } \frac{\textit{variation verticale}}{\textit{variation horizontale}}\right)$$

Exemples

1) Le taux de variation de $f(x)=x^2$ entre 2 et 3 est :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{3^2-2^2}{1}=5$$

2) Le taux de variation de $f(x)=\frac{1}{x}$ entre -5 et -2 est :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(-2)-f(-5)}{-2-(-5)}=\frac{\frac{1}{-2}-\frac{1}{-5}}{3}=\frac{\frac{-3}{10}}{3}=\frac{\frac{-3}{10}\times 1}{3}=\frac{-1}{10}$$

→ **Exercices : 3p.97 a et b et n°14p.100**

2) Nombre dérivé et tangente :

On s'intéresse ici au comportement de la sécante et de son coefficient directeur lorsque b se rapproche de a.

Si on écrit b sous la forme $a+h$, cela revient à étudier ce comportement lorsque h se rapproche de 0.

Le taux de variation de f entre a et b est alors : le taux de variation de f entre a et $a+h$, soit :

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$ c'est à dire : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

DÉFINITION :

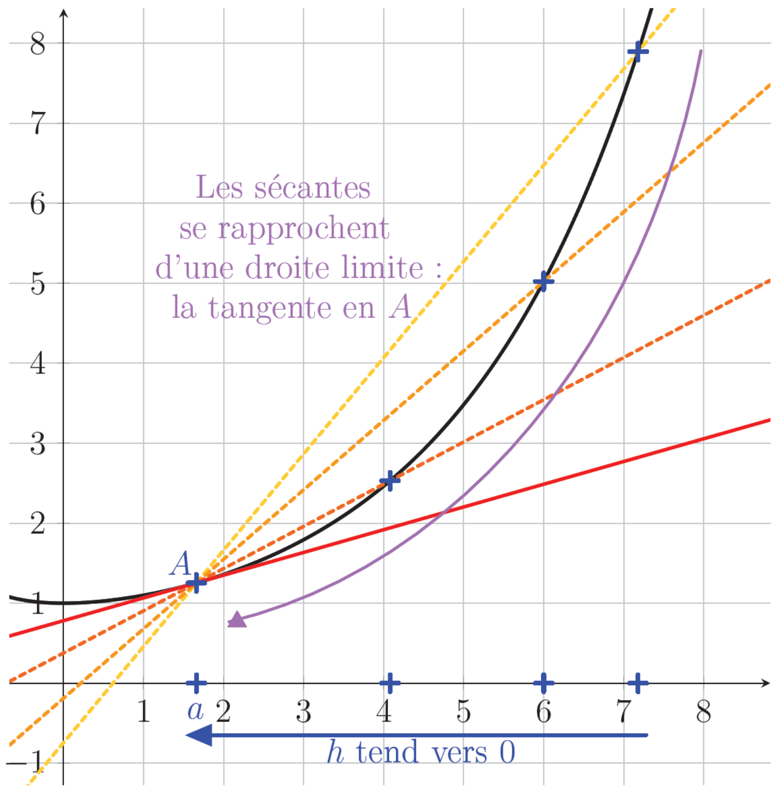
Lorsque ce taux de variation (ou coefficient directeur de la droite (AB)) tend vers un nombre réel fini l quand h tend vers 0, on observe que les sécantes se rapprochent d'une droite limite que l'on appelle : tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.

Dans ce cas, on note ce nombre $f'(a)$. On appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.

$f'(a)$ est donné par la formule :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



f'(a) est le coefficient directeur de cette droite « limite » appelée tangente

EXEMPLE 1 :

Ici, on lit : $a\simeq 1{,}6$ et on peut conjecturer que $f'(a)\simeq\dfrac{1}{4}$ c'est à dire : $f'(1{,}6)\simeq\dfrac{1}{4}$

→ **EXERCICES : 4P.94, 16P.100, 27, 28, 31 P.101**

EXEMPLE 2 :

Pour la fonction $f(x)=5-3x^2$, déterminer si $f'(1)$ existe (on dit aussi : si f est dérivable en 1) ou non et si oui, donner sa valeur.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(5-3(1+h)^2)-(5-3\times1^2)}{h}=\frac{5-3(1+2h+h^2)-2}{h}=\frac{5-3-6h-3h^2-2}{h}=\frac{-6h-3h^2}{h}=\frac{h\times(-6-3h)}{h}$$

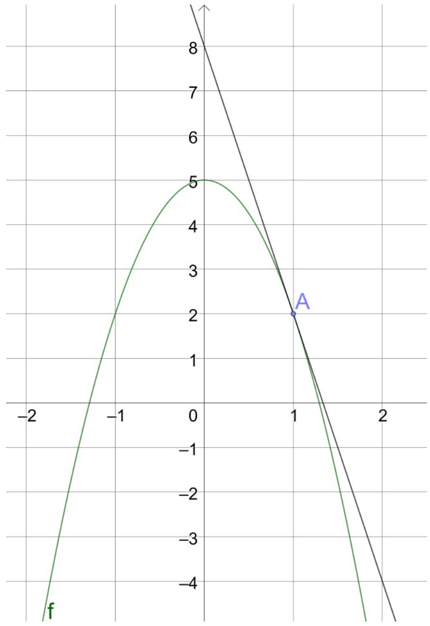
Donc $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-6-3h$

Donc $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}-6-3h=-6$

Autrement dit :

Lorsque h se rapproche de 0, $-6-3h$ se rapproche de - 6.

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-6$



Vérification graphique :

On observe que le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est bien -6.

PROPRIÉTÉ-DÉFINITION

L'équation réduite de la tangente à la courbe de f en a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

PREUVE :

Cette tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Elle a donc une équation du type $y=f'(a)\times x+\mathrm{p}$
Comme elle passe par le point $A(a;f(a))$, alors :
$f(a)=f'(a)\times a+p$
Ainsi : $p=f'(a)\times a-f(a)$

Donc l'équation de la tangente s'écrit :
$y=f'(a)\times x+f(a)-f'(a)\times a$
$y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$

EXEMPLE On reprend l'exemple précédent : $f(x)=5-3x^2$.

Donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 :

Nous remplaçons a par 1 dans la formule $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Ainsi : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$
Or, on a $f'(1)=-6$ d'après le calcul précédent et $f(1)=5-3\times1^2=2$
Donc on obtient en remplaçant $f'(1)$ et $f(1)$ par leurs valeurs :
$y=-6(x-1)+2$ c'est à dire : $y=-6x+6+2$

Ainsi : $y=-6x+8$, ce qui est cohérent avec le graphique.

→ **EXERCICES : 18 P.100, 32P.101, 33, 34 P.102**